

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

В. М. Онищенко

ДИНАМІЧНА РЕАКЦІЯ І НАВАНТАЖЕННЯ ЛІТАКА
ПРИ ДІЇ АТМОСФЕРНОЇ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2018

УДК 629.735.33.025.015(075.8)
О-59

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. Г. Солодов,
д-р техн. наук, проф. Є. О. Українець

Онищенко, В. М.

О-59 Динамічна реакція і навантаження літака при дії атмосферної турбулентності [Текст]: навч. посіб. / В. М. Онищенко. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2018.– 176 с.

ISBN 978–966–662–598–7

Створено математичну модель (ММ) динаміки ЛА і навантаження конструкції. На основі сформованої ММ і числового розрахунку на ЕОМ отримано форми і частоти власних коливань крила, проаналізовано динамічну реакцію літака на дію вертикального пориву. Посібник відповідає навчальним програмам з дисциплін «Теорія стійкості і механічних коливань пружних систем», «Переддипломний курс», «Аеропружність конструкцій» і доповнює лекційні курси.

Для студентів, які вивчають дисципліни «Теорія стійкості і механічних коливань пружних систем», «Переддипломний курс» і «Аеропружність конструкцій», а також при виконанні дипломного проекту.

Іл. 135. Табл. 3. Бібліогр.: 9 назв

УДК 629.735.33.025.015(075.8)

© Онищенко В. М., 2018
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2018

ISBN 978–966–662–598–7

ВСТУП

Міцність літального апарата (ЛА) забезпечується циклом теоретичних, розрахункових та експериментальних робіт, які починають виконувати на стадії ескізного проектування і продовжують до зняття з експлуатації. Забезпечення міцності ЛА – дуже відповідальне завдання, воно регламентується авіаційними правилами (АП). Для вирішення завдань щодо забезпечення міцності ЛА, як показав досвід їх створення, слід використовувати розрахункові і експериментальні методи.

Для проектування ЛА за умовами міцності характерним є комплексний підхід, в якому одночасно враховується ряд міцнісних вимог до конструкції: забезпечення статичної міцності неушкодженої конструкції, потрібного рівня залишкової міцності за наявності певних допустимих пошкоджень, ресурсу конструкції за умовами опору втомі, вимог до жорсткості й стійкості конструкції виходячи із забезпечення безпеки за умовами статичної та динамічної аеропружності.

Необхідно запобігти руйнуванню або незворотній зміні форми елементів ЛА, появі неприпустимо великих вібрацій і розвитку коливної нестійкості конструкції, а також обмежити переміщення елементів конструкції. Очевидний, на перший погляд, шлях забезпечення міцності за допомогою збільшення площ поперечних перерізів елементів конструкцій в деяких випадках є неефективним. Пошук оптимальних рішень у задачах динаміки і міцності ЛА – довгий і непростий процес. Слід розуміти фізичні основи функціонування і навантаження літака або вертольота, знати основні чинники, що впливають їх міцність.

На ранніх стадіях проектування ЛА прагнуть реалізувати такі пружномасові характеристики конструкції, при яких будуть забезпечені її аеропружна стійкість і міцність. Цю проблему вирішують у комплексі з іншими завданнями за допомогою системи розрахунку, яка поряд із вимогами до аеродинамічних характеристик, характеристик динаміки, управління і міцності враховує і вимоги до характеристик аеропружності. З цією ж метою використовують наявний досвід і статистичні дані, що дозволяють оцінити аеропружну стійкість проектованого ЛА.

У ході робіт беруть до уваги і по можливості застосовують деякі загальні методи й засоби профілактики та «лікування» ЛА від небезпечних явищ аеропружності: підвищення жорсткості всіх елементів конструкції при незмінному співвідношенні цих жорсткостей; зміну співвідношення жорсткостей, що поліпшують характеристики аеропружності.

Для регламентування міцності ЛА застосовують Норми міцності [1]. Досвід їх створення і вдосконалення дозволяє вказати такі методи регламентування міцності конструкції (табл.1).

Таблиця 1 – Методи регламентування міцності конструкції

<i>Метод</i>	<i>Необхідна вихідна інформація</i>	<i>Оцінка рівня безпеки</i>	<i>Особливості методу</i>
<i>Умовних навантажень</i>	Якісний опис умов експлуатації. Узагальнений досвід експлуатації аналогічних об'єктів	По аналогії з ЛА, що експлуатуються	Оперативне використання з подальшим уточненням критеріїв
<i>Розрахункового аналізу</i>	Інформація, що дозволяє побудувати розрахункову математичну модель	За величиною прийнятого критерію	Проведення параметричних досліджень
<i>Ймовірнісно-статистичний</i>	Статистичний матеріал для визначення законів розподілу випадкових параметрів і побудови ймовірнісної моделі. Критерійний (еталонний) рівень потрібної безпеки	За прийнятною ймовірнісною моделлю (критерієм)	Застосування до масових подій і явищ. Застосування до рідкісних подій, пов'язане з додатковими умовами
<i>Оптимізаційний</i>	Загальні відомості про силові конструкції. Умови експлуатації ЛА в формі обмежень на величину і розподіл зовнішніх навантажень	Щодо побудованих ЛА	Можливість застосування до складних силових схем конструкції

Перелічені методи регламентування міцності конструкції мають свої переваги та недоліки.

Метод умовних навантажень

У польоті на конструкцію літального апарата може діяти складна система сил. Ряд явищ, які супроводжують навантаження літака (дія нестационарних аеродинамічних сил, вплив деформації конструкції та її коливань і т. ін.), внаслідок математичних або експериментальних труднощів не завжди можна детально дослідити або надійно врахувати. У таких випадках проводять спеціальні (часто якісного характеру)

дослідження, що дозволяють оцінити можливі зміни навантажень у розглянутих складних умовах.

На основі цих досліджень задається еквівалентна з точки зору навантаження конструкції система статичних навантажень. При такому методі нормування останні зазвичай задаються у вигляді емпіричних співвідношень, що пов'язують навантаження з параметрами руху літального апарата і його характеристиками через деякі числові множники (коефіцієнти), значення яких вибирають відповідно до уявлень про експлуатаційні навантаження.

Узагальнене навантаження ЛА може бути наведено у вигляді

$$P^e = P^e(x_1, \dots, x_k, c_1, \dots, c_n),$$

де x_i – основні визначальні параметри ЛА і його траєкторії польоту; c_i – емпіричні коефіцієнти, що корегують вплив визначальних параметрів на величину узагальненої сили.

Безперечною перевагою цього методу завдання навантажень є простота співвідношень для визначення розподілених сил і моментів. Ці співвідношення у міру накопичення статистичних матеріалів у процесі експлуатації літальних апаратів перевіряють і уточнюють.

Метод розрахункового аналізу

Метод розрахункового аналізу використовують для регламентування міцності за допомогою проведення розрахунків навантажень при заданих вихідних умовах. Основу цього методу становить математична модель функціонування літального апарата в формі системи рівнянь руху ЛА і деформування його конструкції, роботи системи керування і автоматичного управління. Розрахунки проводять або для екстремальних умов навантаження (статична і динамічна міцність), або для типових умов експлуатації (забезпечення витривалості конструкції), або для польотів із граничними швидкісними напорами (забезпечення безпеки щодо аеропружності). Вихідні умови для розрахунків (початкові швидкості польоту, форми атмосферної турбулентності, типові закони управління літаком та ін.) задаються у відповідних розділах Норм міцності.

Рекомендації з методики проведення розрахунків, як правило, містяться в різних випусках "Руководства для конструкторов" (РДК) і доповнюють нормативні вимоги.

Порівняно з методом умовних навантажень метод розрахункового аналізу є більш точним, оскільки дозволяє врахувати конкретні особливості й характеристики ЛА. Очевидно, що для застосування цього

методу необхідні сформовані математичні моделі функціонування ЛА та наявність більш повної інформації щодо літального апарата (масово-інерційні, жорсткі, аеродинамічні характеристики, тощо).

Ймовірісно-статистичний метод

Ймовірісно-статистичний метод дозволяє визначати розрахункові умови залежно від допустимого значення ймовірності неруйнування конструкції.

Оптимізаційний метод

Оптимізаційний метод істотно відрізняється від інших підходів нормування розрахункових умов міцності, оскільки міцність конструкції регламентується за екстремумом цільових функцій.

Методи умовних навантажень і розрахункового аналізу є детерміністичними. Більшість сучасних нормативних документів основана на використанні цих методів і частково на ймовірісно-статистичному підході. Оптимізаційні методи в цей час використовують як допоміжні способи для отримання різних розрахункових оцінок.

При перевірці відповідності конструкції ЛА вимогам Норм міцності передбачено широкий комплекс робіт: проведення статичних випробувань; визначення масових, жорсткісних і частотних характеристик; перевірка безпеки від флатера та інших явищ аеропружності; дослідження конструкції на витривалість і живучість; динамічні випробування шасі на копрі; льотні випробування на граничних за умовами міцності режимах і вимір навантажень на основні елементи конструкції.

Основна частина змісту Норм міцності – вимоги до статичної міцності конструкції.

Метою посібника є дослідження динаміки конструкції при дії атмосферної турбулентності з використанням методу розрахункового аналізу. Для цього буде побудовано модель явища та досліджено функціонування ЛА шляхом проведення числового експерименту на ПЕОМ.

Коливання (вібрації) в конструкції практично завжди наявні в процесі експлуатації. Для літака або вертольота джерелами вібрацій можуть бути двигуни, неспокійна атмосфера, нерівності аеродрому, керуючі дії на ЛА з боку льотчика і системи управління і багато іншого. У вертольоті сильними джерелами коливань є несучий і рульовий гвинти та інші незбалансовані маси, що обертаються. Для правильного розуміння процесів, що відбуваються з ЛА на нестационарних режимах його експлуатації,

необхідно знати динаміку авіаційної конструкції та її фундаментальну основу – аеропружність.

Аеропружність – це наука, що вивчає взаємодію аеродинамічних, пружних та інерційних сил. Вона набуває все більшого значення в багатьох галузях інженерної справи, особливо в авіації. Різні явища аеропружності відрізняються одне від одного за їх відношенням до сил пружності, інерційним і аеродинамічним силам. На рис. 1 показано схему досліджень явищ аеропружності та перелічені деякі основні фізичні закономірності, що відбуваються на ЛА в польоті.



Рис. 1. Схема досліджень явищ аеропружності

Слід розрізняти, як видно зі схеми, явища статичної і динамічної стійкості конструкції, аеродинамічну стійкість жорсткого ЛА і механічні коливання. Відзначимо, що динамічна реакція літака на дію зовнішніх сил має розглядатися з урахуванням аеродинамічних, пружних і інерційних сил.

Сучасні конструкції характеризуються дуже значною гнучкістю, а польоти відбуваються на великих швидкостях, що є основною причиною різних небезпечних явищ аеропружності. В результаті застосування нових матеріалів у конструкції, збільшення розмірів ЛА і швидкостей польоту

аеропружність стала одним із найбільш важливих чинників, що враховуються при проектуванні літаків і вертольотів. Конструктори ЛА постійно стикаються з різними проблемами статичної та динамічної аеропружності.

З урахуванням широкого використання бортових систем для управління ЛА необхідно досліджувати і аероавтопружність. Роль і взаємовплив базових наук в аеропружності і аероавтопружності показані на рис. 2.

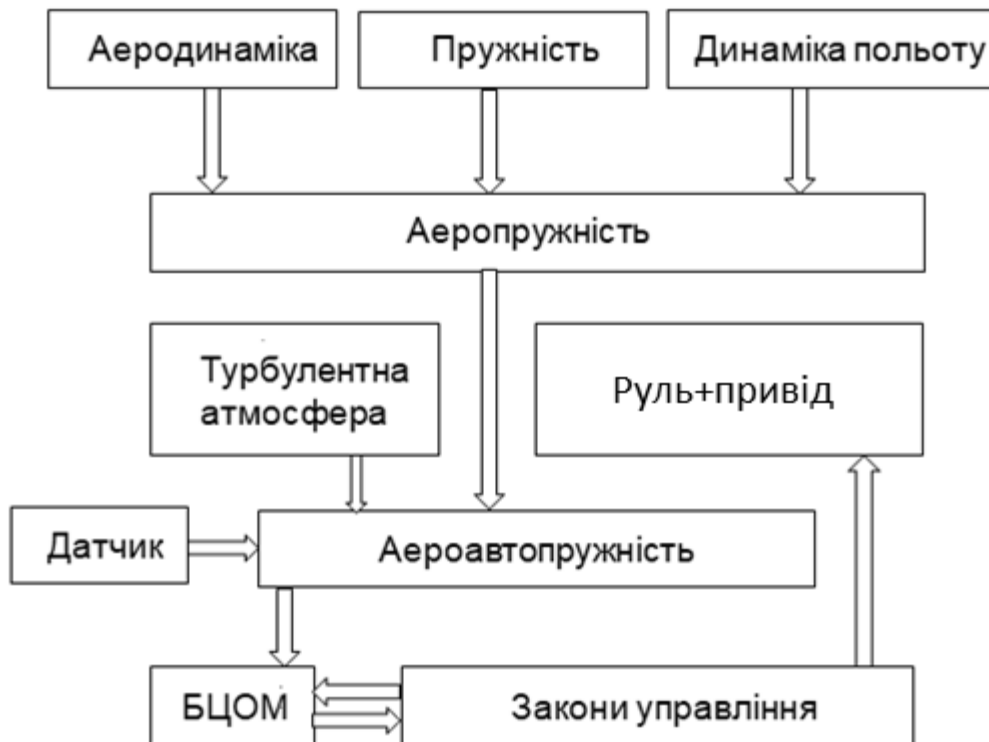


Рис. 2. Рішення проблем аеропружності й аероавтопружності

Явища аеропружності, як правило, мають складний характер. Для їх дослідження застосовують комплекс теоретичних та експериментальних методів, які містять розрахункові методи, фізичне моделювання, наземні і льотні випробування ЛА, а також комбіновані методи, наприклад розрахунки з використанням експериментальних даних. Основу розрахункових методів становлять математичні моделі (ММ), що відображають пружномасові характеристики конструкції, характеристики системи керування і моделі аеродинамічних впливів. При дослідженні аеропружності також застосовують метод фізичного моделювання.

Через обмежені можливості наземних експериментальних установок і льотного експерименту дуже важливим є розвиток напрямку,

орієнтованого на створення і випереджальне функціонування математичних моделей об'єктів – їх математичних дублерів.

ММ аеропружності необхідно використовувати на етапах проектування, експлуатації та модернізації ЛА. Відзначимо, що випереджаюче функціонування математичних моделей об'єктів можливо тільки при постійному корегуванні моделі на базі даних фізичного моделювання системи і льотного експерименту.

На стадії розроблення технічної пропозиції та ескізного проектування при виборі схеми ЛА і його основних параметрів велике значення мають ММ аеропружності. Створена на основі досвіду проектування і розрахунків попередніх літаків і вертольотів ММ дозволяє досліджувати особливості динаміки і навантаження конструкції, умови її стійкості.

На стадії технічного проектування основне завдання – вибір параметрів конструкції. Складні розрахунки слід виконувати за допомогою математичних моделей, які постійно вдосконалюються у міру проведення експериментальних досліджень.

При доведенні дослідного зразка і запуску його в серійне виробництво продовжують доопрацювання ММ. Помилка при остаточному оцінюванні міцності конструкції на цьому етапі є неприпустимою.

Літальний апарат являє собою складну систему з просторовою геометрією і розподіленими масою і жорсткістю, великою кількістю зосереджених вантажів. Він навантажений аеродинамічними і інерційними силами, в місцях кріплення вантажів або агрегатів діють зосереджені сили. Забезпечення міцності й аеропружної стійкості ЛА при проектуванні і випробуванні – важливе і складне завдання, бо конструкція має задовольняти вимоги високої безпеки при мінімальній масі силових елементів.

Розроблення методів і способів розрахунку динамічних характеристик конструкції ЛА посідає чільне і важливе місце в процесі його проектування. Динамічні характеристики конструкції (форми і частоти власних коливань) – це базова вихідна інформація, яка необхідна для формування розрахункових моделей аеропружності й дослідження динаміки і навантаження конструкції в процесі її експлуатації. Знання власних частот конструкції дозволяє виключити резонанси в процесі експлуатації, а форми власних коливань дають можливість уявити деформацію конструкції, що має нескінченне число степенів вільності, у вигляді розкладання за заданими формами.

Норми міцності містять також вимоги, спрямовані на забезпечення безпеки ЛА за умовами аеропружності (флатера, дивергенції, реверсу органів керування, бафтинга, аеропружних коливань у системі "ЛА – САУ", шимі, земного резонансу вертольота і т. ін.). У конструкції ЛА в межах льотного діапазону швидкостей не повинні виникати небезпечні явища аеропружності. Потрібний не менше ніж 20-відсотковий запас за швидкістю відносно гранично допустимої швидкості в експлуатації для критичних швидкостей аеропружності. Критичною швидкістю називають швидкість польоту, при перевищенні якої можливе виникнення недопустимих явищ аеропружності.

Одне з найбільш небезпечних явищ аеропружності – флатер. Це автоколивання конструкції літака, що відбуваються під дією аеродинамічних, інерційних і пружних сил. Крім класичного флатера конструкції ЛА велике значення мають також різновиди автоколивань пружних частин ЛА, наприклад: флатер повітряних гвинтів – панельний, що виникає при $M > 1$, зривний, що супроводжується відривом потоку при великих кутах атаки, і т. ін.

Одночасно з дослідженнями флатера проводять роботи, пов'язані з оцінюванням впливу загальних деформацій конструкції літака на його керованість і зміни аеродинамічних характеристик. Зокрема, визначають критичні швидкості реверсу органів управління і дивергенції крила.

З усіх явищ аеропружності не забороняють лише наявність бафтинга невеликої інтенсивності. Бафтинг – це нерегулярні коливання ЛА або окремих його елементів, викликані нестаціонарними аеродинамічними силами при зриві потоку. При цьому потрібно, щоб рівень вібрацій був безпечним для конструкції і екіпажу.

Відзначимо, що на бойових ЛА проблема бафтинга може бути особливо актуальною. Наприклад, при випуску в потік гальмівного щитка 1 (рис. 3) за ним формується нестаціонарна вихрова зона течії.

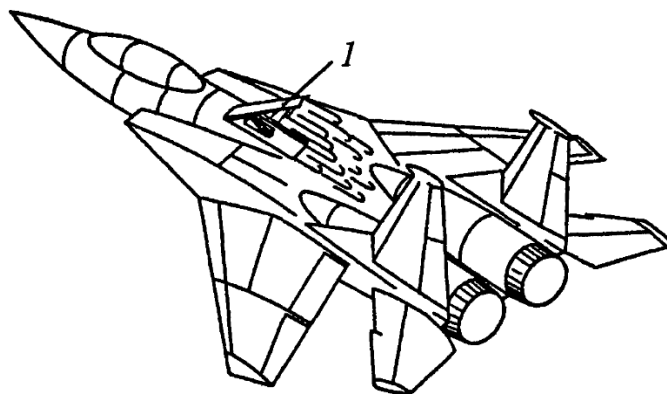


Рис. 3. Бафтинг маневреного літака

Частота сходу вихрів з гальмівного щитка така, що в конструкції хвостового оперення і всього ЛА збуджуються коливання в широкому частотному діапазоні. Інтенсивність бафтинга іноді буває такою, що екіпаж через вібрації не бачить показання приладів, а окремі елементи конструкції можуть зруйнуватися [5].

На рис. 4 показано середньоквадратичні значення перевантаження $\sigma_{(1)}$ в точці 1 лівого кіля маневреного літака при польоті з випущеним гальмівним щитком. Перевантаження віднесені до швидкісного напору q . Дані отримані розрахунком на основі математичних моделей різного рівня складності і числового розрахунку для випадку висоти $H = 5000$ м і швидкості $U_o = 150$ м/с польоту.

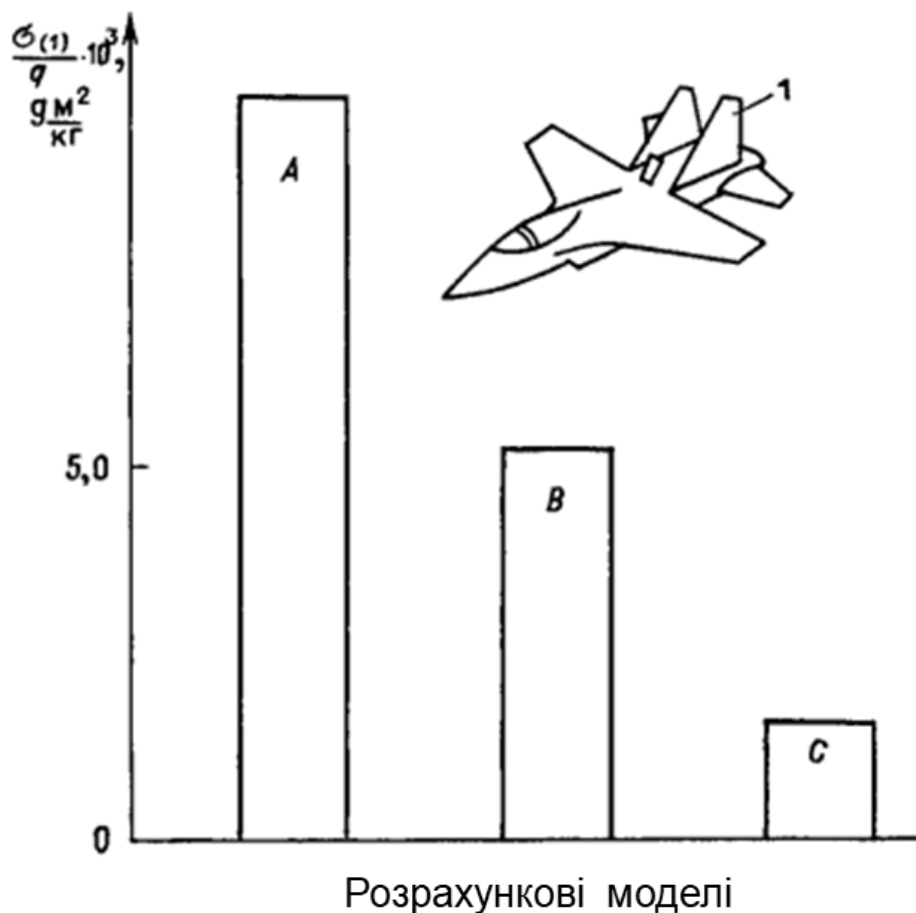


Рис. 4. Середньоквадратичне перевантаження в точці 1 лівого кіля маневреного літака, віднесене до швидкісного напору

Рівень А відповідає спрощеній розрахунковій моделі: апарат защемлений в центрі мас літака, утримуються форми коливань защемленого до фюзеляжу кіля. Рівень В отриманий для спрощеної розрахункової моделі, коли нелінійне аеродинамічне навантаження

знаходиться без урахування деформації кілів. Рівень C відповідає повній розрахунковій моделі – деформація розкладена за формами власних коливань всього ЛА, аеродинамічне навантаження визначається з урахуванням деформації ЛА. Відзначимо, що розрахункова модель C найбільш точно відповідає даним льотного експерименту [4].

До явищ динамічної аеропружності й нестійкості конструкції відносять шимі коліс літальних апаратів. Утрата стійкості руху шасі літака, що призводить до небезпечних автоколивань, називається шимі. Ці автоколивання відбуваються при взаємодії інерційних, пружних і демпфірувальних сил. Завдяки силам тертя між пневматиками коліс і поверхнею аеродрому в систему надходить енергія.

Відносно шимі потрібно, щоб у всьому діапазоні можливих мас і швидкостей руху літака по злітно-посадковій смузі під час зльоту і посадки була забезпечена його відсутність. Це підтверджується розрахунками та випробуваннями стояків шасі на копрі з рухомою опорою. Випробування дозволяється не проводити, якщо розрахунками або спеціальними вимірами в процесі льотних випробувань доведено безпеку шимі.

Істотний вплив на аеропружні характеристики ЛА мають системи автоматичного керування. З одного боку, вони значно ускладнюють завдання, а з іншого – дозволяють боротися і уникати нестійкого руху пружного ЛА в потоці повітря, знижують навантаження. Для роботи системи потрібні швидкодіючі потужні бустери. Незважаючи на внесені при цьому витрати, конструктори отримують як зниження ваги конструкції, так і збільшення її ресурсу.

До актуальної задачі аеропружності відноситься визначення динамічної реакції ЛА і навантаження пружної конструкції при польоті в неспокійному повітрі і при посадці. Ці завдання найбільш актуальні для важких літаків із крилами великого подовження.

На рис. 5 показано зміну перевантаження n_y у різних точках конструкції літака Ан-124 при вході в порив [5]. Як бачимо, перевантаження на кінці крила майже в три рази перевищує перевантаження в центрі мас. Ця обставина має важливе значення при розрахунку пошкоджень конструкції від втоми, виборі місць розташування різних підвісок, вузлів кріплення рульових поверхонь і т. ін.

Динамічні навантаження від неспокійного повітря в деяких випадках настільки важкі для конструкції, що необхідно вживати заходів до їх зниження, тому розробляють різні автоматичні системи, що зменшують навантаження від руху літака як твердого тіла і пружних коливань

конструкції. При цьому органами керування можуть бути руль висоти і напрямку, закрилки, інтерцептори, елевони та інші поверхні, що відхиляються і створюють аеродинамічні сили, які протидіють навантаженням від поривів.

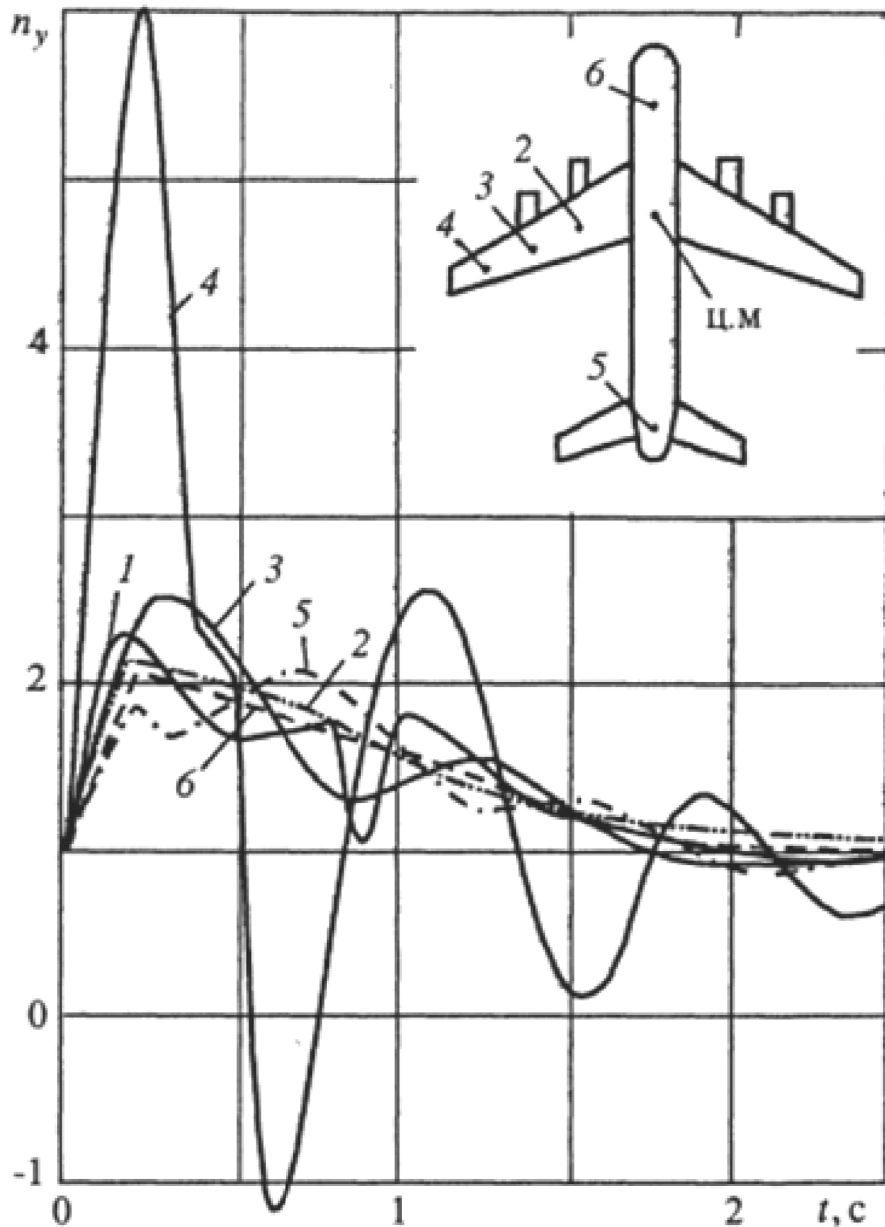


Рис. 5. Зміна перевантаження в різних точках конструкції літака Ан-124 при вході в порив

На рис. 6 показано залежності відносних пружних переміщень на кінці крила \bar{r}_k від часу при дії різних видів дискретних поривів, що миттєво охоплюють ЛА. Відносні пружні переміщення віднесені до максимального за модулем значення переміщення кінця крила при миттєвому охопленні ЛА поривом.

З рисунка видно, що значна деформація літака і зміна його форми суттєво змінюють як аеродинамічні, так і аеропружні характеристики.

Допущення щодо одновимірності поривів є наближеним. Воно може бути прийнятним для випадків, коли масштаб турбулентності великий відносно розмаху крила літака. Для великих літаків при польоті на малих висотах це може призвести до значних похибок при дослідженні процесів навантаження ЛА. В цих випадках треба враховувати зміну полів швидкостей не тільки в напрямку польоту, але і вздовж розмаху (рис. 6).

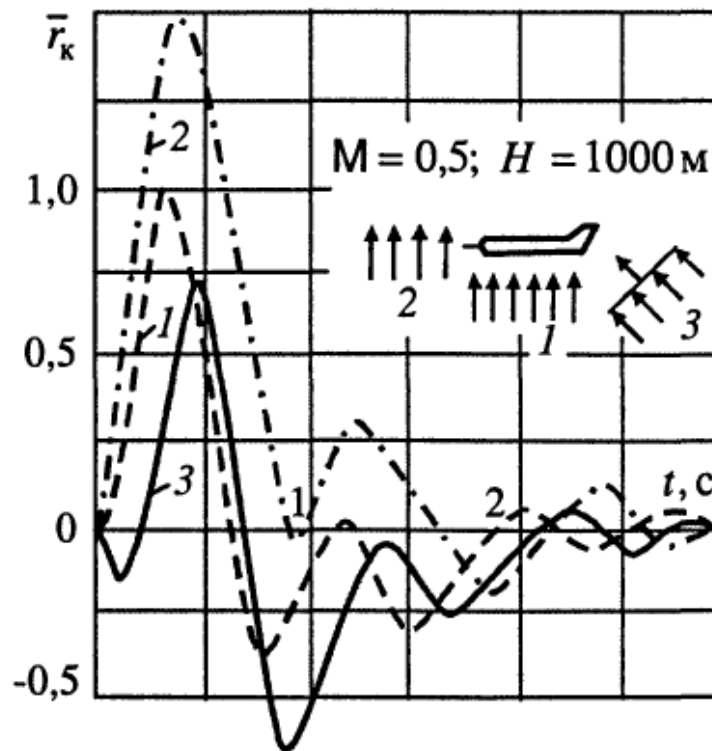


Рис. 6. Залежність відносного переміщення кінця крила від часу:
 1 – миттєве охоплення ЛА поривом; 2 – поступовий вхід; 3 – вплив ударної хвилі при підході до ЛА ззаду

Динамічна реакція літака Як-42 на пориви з різними законами зміни швидкостей вздовж розмаху крила показана на рис. 7. Як бачимо, додаткове перевантаження в центрі мас ЛА залежить від закону розподілу вертикальних швидкостей.

Дані рис. 8 ілюструють вплив пружності конструкції на дискомфорт екіпажу при польоті літака в турбулентній атмосфері. Наведено спектральну щільність приросту перевантаження $S_{n_y}^{\Delta y}$ в центрі мас і в кабіні екіпажу літака при центровці, близькій до задньої.

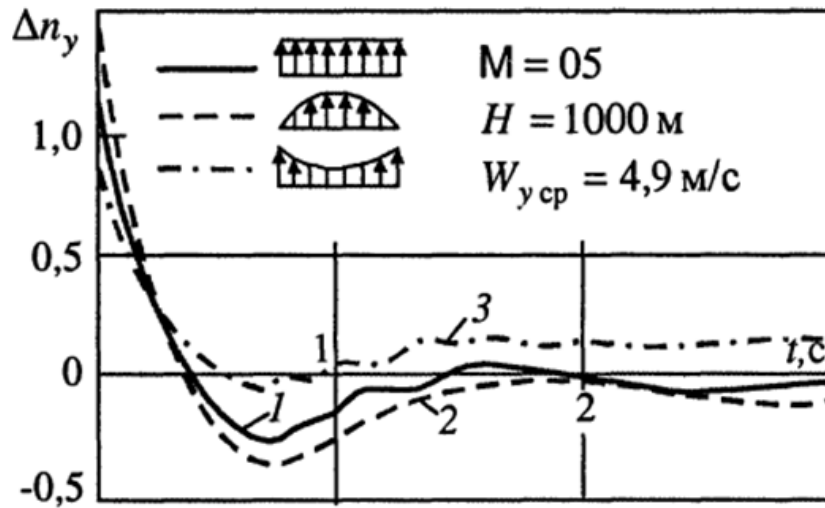


Рис. 7. Додаткове перевантаження в центрі мас ЛА залежно від закону розподілу вертикальних швидкостей вздовж розмаху крила

В розрахунках використовували модель Драйдена з середньоквадратичним відхиленням швидкості пориву $\sigma_{W_y} = 1 \text{ м/с}$ і масштабом турбулентності $L_T = 150 \text{ м}$ при $M = 0,8$, $H = 500 \text{ м}$.

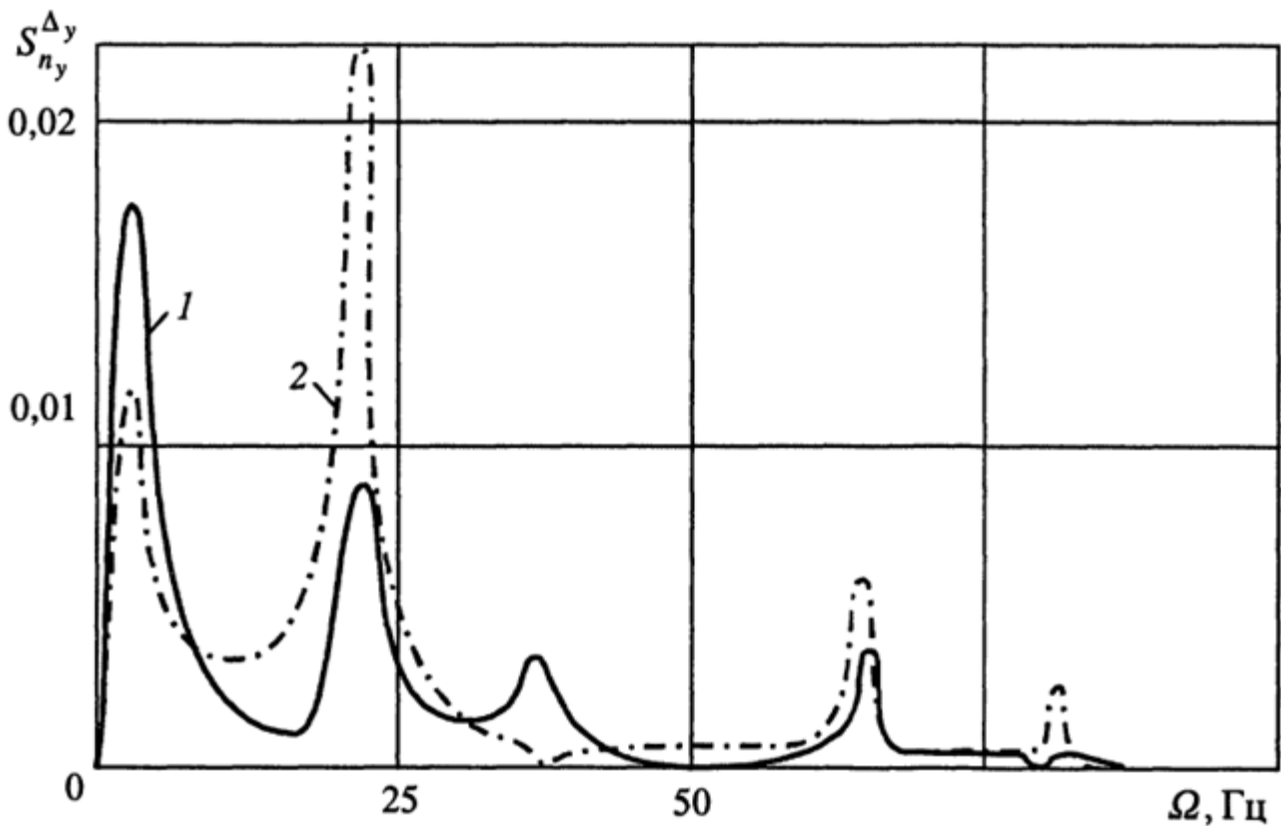


Рис. 8. Спектральна щільність приросту перевантаження:
 1 – в кабіні екіпажу; 2 – в центрі мас

Аналіз даних показує, що пружність конструкції сильно впливає на дискомфорт у кабіні екіпажу. Середньоквадратичне відхилення приросту перевантаження в кабіні (крива 1) перевищує σ_{n_y} в центрі мас (крива 2) на 25 ... 30 %.

На рис. 9 показано оцінку спектральних характеристик навантаження крила літака Ан-124.

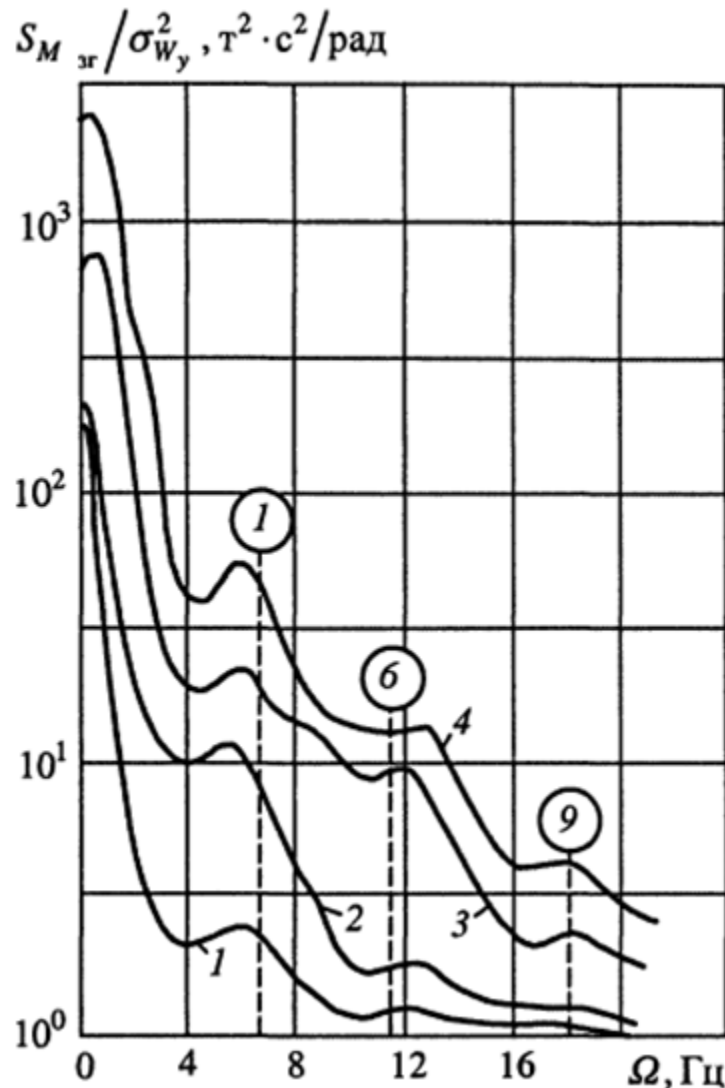


Рис. 9. Спектральна щільність згинальних моментів в кореновому перерізі крила

Залежності $S_{M_{z2}} / \sigma_{W_y}^2$ від частоти Ω показують розподіл нормованих спектральних густин згинальних моментів у кореновому перерізі крила, які отримано шляхом математичного моделювання на ПЕОМ руху літака в турбулентній атмосфері з середньоквадратичним

значенням швидкості пориву вітру $\sigma_{W_y} = 2,25$ м/с при різних швидкостях польоту (1 – 100 м/с; 2 – 140 м/с; 3 – 200 м/с; 4 – 230 м/с).

Штриховими лініями на рисунку позначені частоти власних коливань конструкції, за якими найбільш примітним є відгук системи. Частоти відповідають 1-, 6- і 9-й формам власних коливань. Видно, що реакція літака типу Ан-124 як пружного тіла на широкополосний спектр навантаження виражена слабо.

Термін служби планера літака визначається сумарними пошкодженнями, що накопичуються в конструкції при русі на землі і в польоті. Основний внесок у пошкодження конструкції неманеврених літаків роблять бовтаночні та маневрені навантаження.

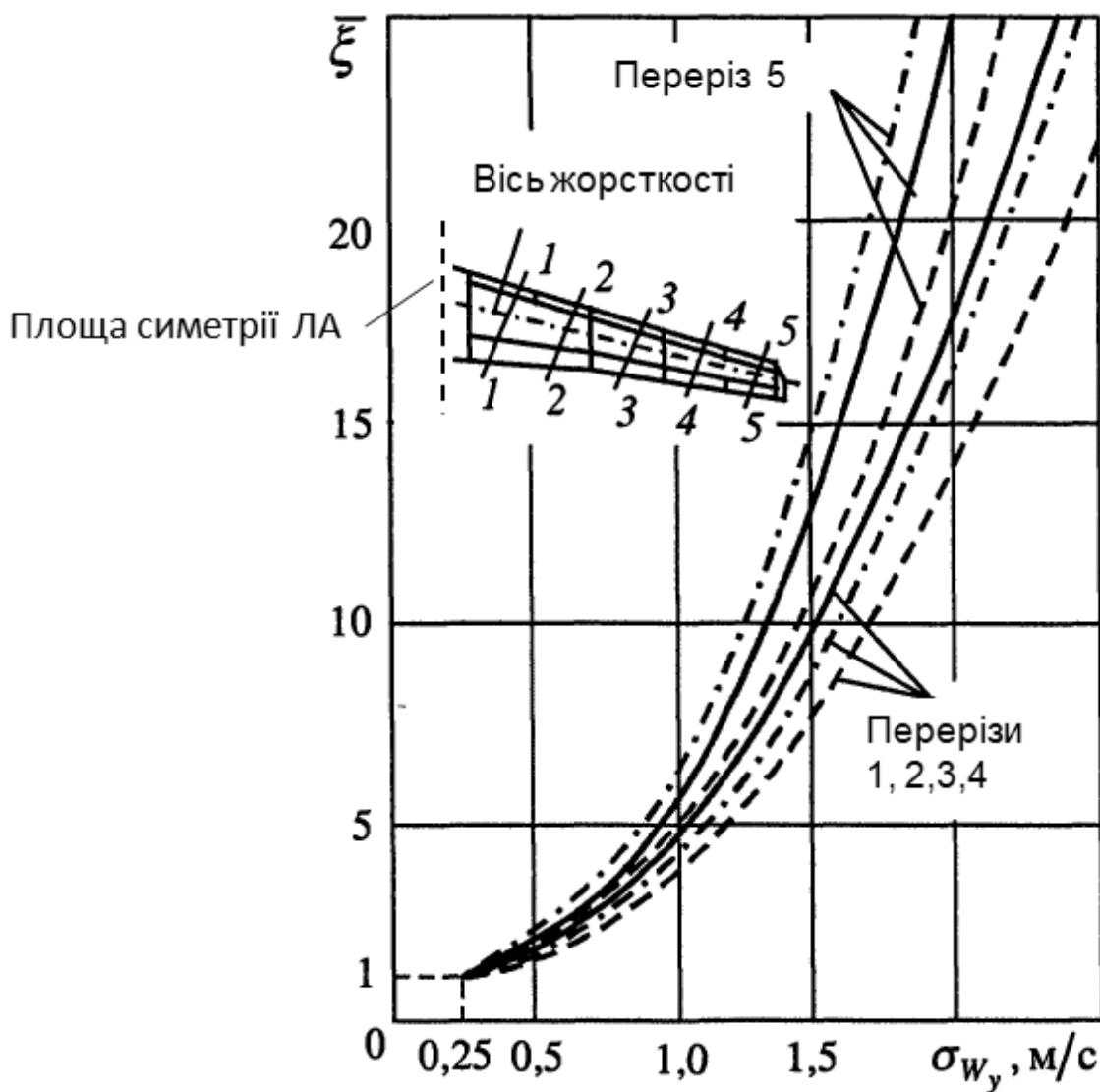


Рис. 10. Зміна відносної пошкоженості конструкції

На рис. 10 показано графіки, що характеризують зміну відносного пошкодження конструкції $\bar{\xi} = \xi_{\sigma_{W_y}} / \xi_{\sigma_{W_y} = 0,25}$ залежно від σ_{W_y} для п'яти характерних перерізів крила і трьох швидкостей польоту (штрихова лінія – 100 м/с; суцільна – 170 м/с; штрихпунктирна – 230 м/с). Видно, що зі збільшенням σ_{W_y} різко (за законом параболи) зростає $\bar{\xi}$. Для перерізу 5 зростання параметра $\bar{\xi}$ відбувається інтенсивніше, ніж для решти чотирьох перерізів, що розташовані ближче до кореневої частини крила. Отже, чутливість перерізів пружної конструкції до атмосферної турбулентності за таким параметром, як утомне пошкодження, залежить від їх місця розташування на крилі.

Особливо актуальним є завдання динаміки і аеропружної стійкості для вертольота. Відзначимо, що вертоліт являє собою складну аеромеханічну систему з великою кількістю обертових елементів, ідеально незбалансованих. Крім того, лопаті працюють у сильно збуреному несиметричному повітряному потоці. Картина обтікання лопатей при повороті п'ятилопатевого гвинта на кут $\Delta\psi = 360/5$ періодично повторюється (рис. 11).

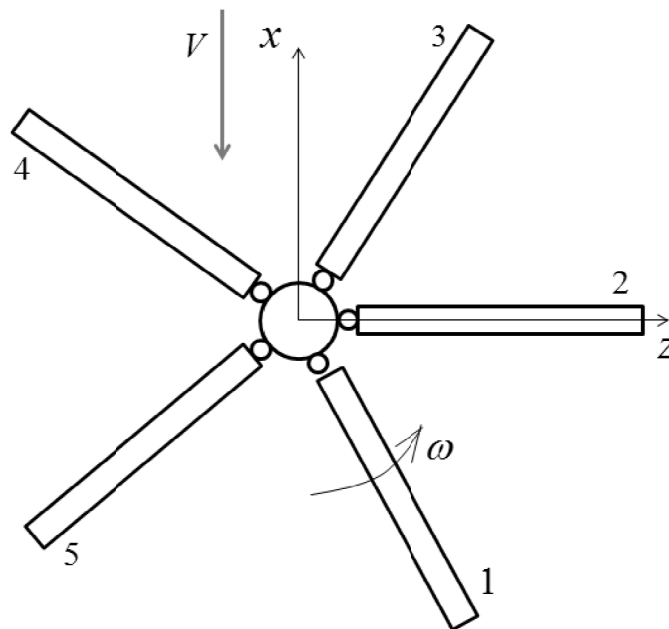


Рис. 11. Повторення картини обтікання лопатей

Аеродинамічне навантаження на вертоліт змінюється з частотами, кратними

$$\omega = \omega_{H\Gamma} / 5,$$

де ω_{HG} – колова частота обертання несучого гвинта. Періодичні зовнішні аеродинамічні сили є причиною так званих нормально обумовлених вібрацій конструкції вертольота.

У цій системі можлива поява коливань різної природи – вільних і вимушених коливань, автоколивань. Особливо небезпечними є вимушені резонансні коливання, які мають бути виключеними при експлуатації вертольота. В процесі проектування лопаті вертольота проводять розрахунки з метою недопущення збігу частот власних коливань конструкції з гармоніками зовнішніх сил.

Навіть невеликі за величиною амплітуди змінних аеродинамічних сил можуть викликати значні за величиною змінні напруження. Гармонічні складові аеродинамічних сил, що діють на лопать у польоті, як показали дослідження, мають істотну величину до гармонік не вище восьмої. Вищі гармоніки, як правило, настільки малі за величиною, що їх можна не брати до уваги.

Побудовані спільно на одному графіку частоти власних коливань лопаті, що обертається, і зовнішнього навантаження називаються резонансною діаграмою лопаті.

На рис. 12 показано зміну кутового прискорення змаху лопаті, а на рис. 13 – кутового прискорення качання лопаті за один оборот несучого гвинта на режимі сталого горизонтального польоту транспортного вертольота [7].

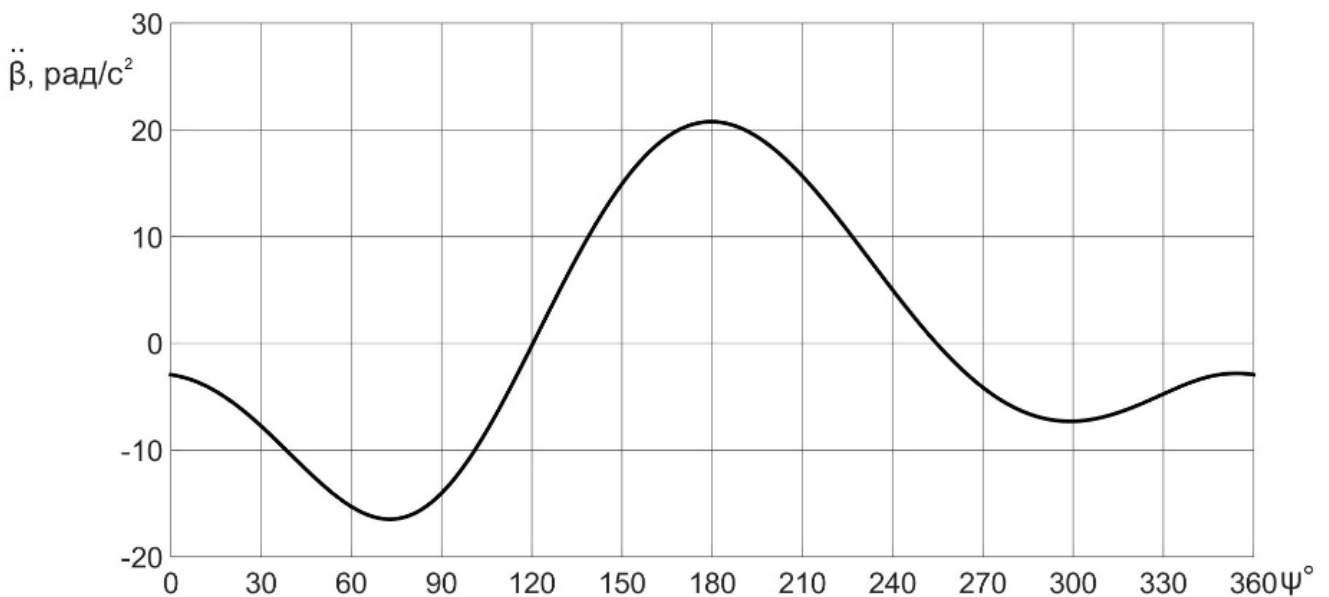


Рис. 12. Зміна кутового прискорення змаху лопаті за один оборот несучого гвинта

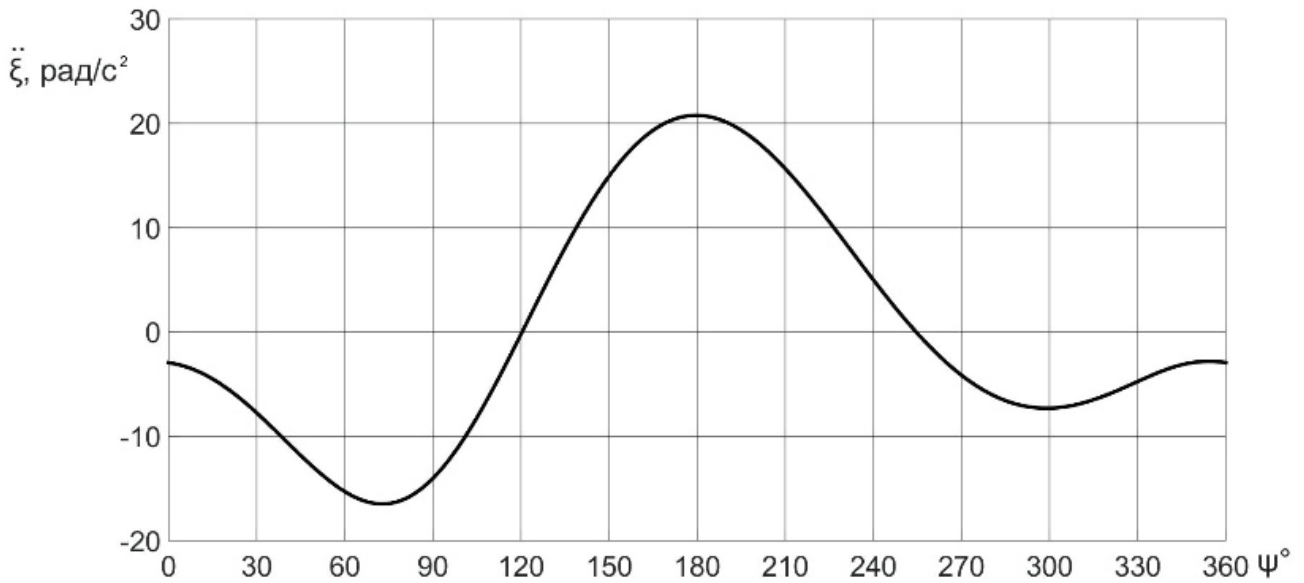


Рис. 13. Зміна кутового прискорення качання лопаті за один оборот несучого гвинта

На рис. 14 показані форми пружної лінії лопаті для чотирьох азимутальних положень: 0, 90, 180 і 270°. Незважаючи на те, що основний внесок у пружну лінію здійснює перша форма коливань, можна замітити внесок і решти форм.

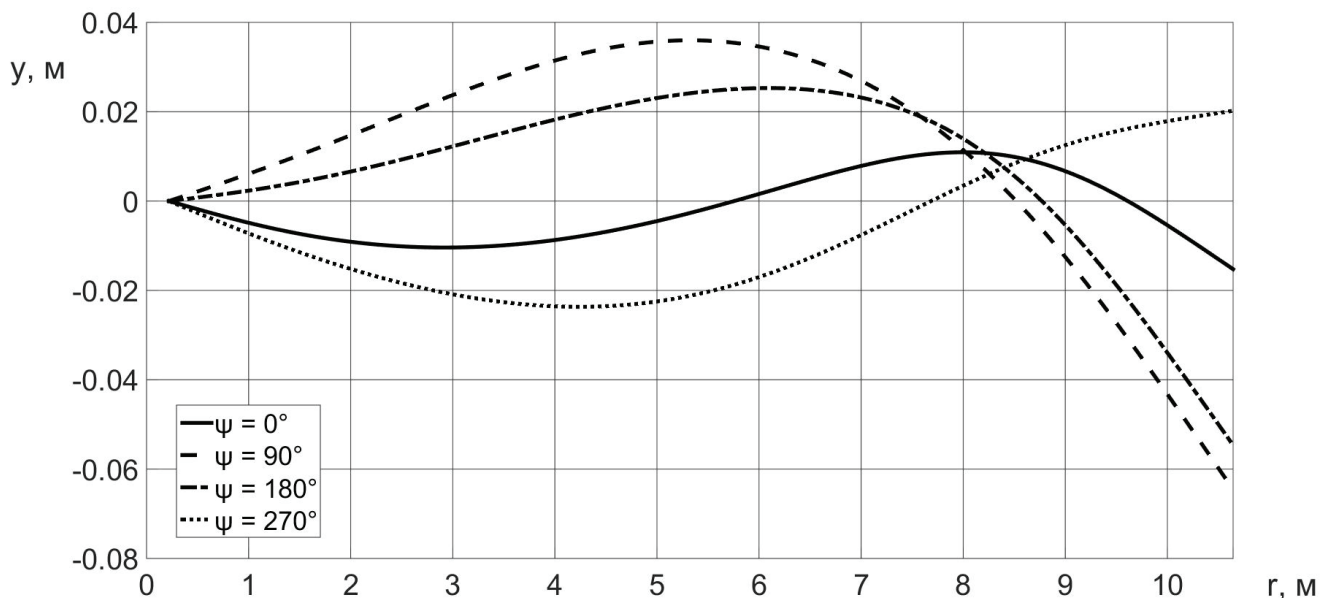


Рис. 14. Форма пружної лінії лопаті при її різних азимутальних положеннях
 Зміна нормальних напружень у часі для різних радіусів лопаті показана на рис. 15. Ближче до кореневої частини лопаті переважають високі статичні напруження і низькі амплітуди змінних, а в міру віддалення

від неї ситуація змінюється на протилежну. Це відбувається через зміну поздовжнього навантаження лопаті, викликану відцентровими силами, а також дією нестационарного аеродинамічного навантаження і збуренням у русі лопаті.

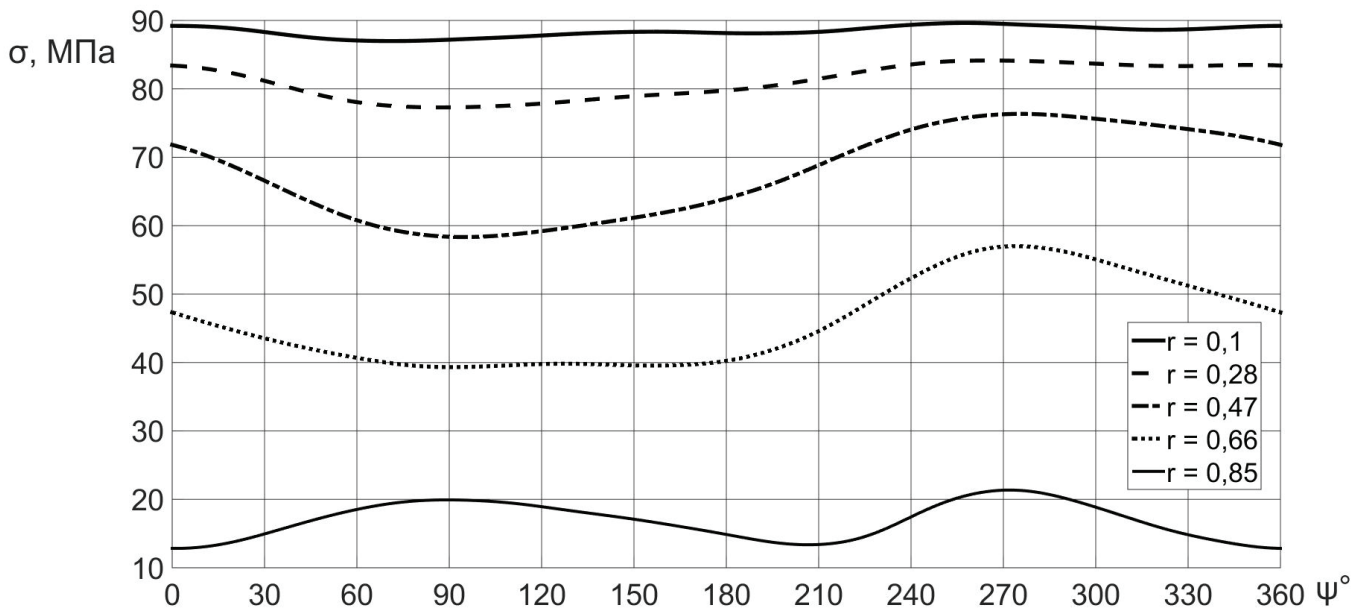


Рис. 15. Зміна нормальних напружень у часі для різних радіусів лопаті

Розподіл максимальних амплітудних напружень і відповідних їм середніх напружень по довжині лопаті показано на рис. 16.

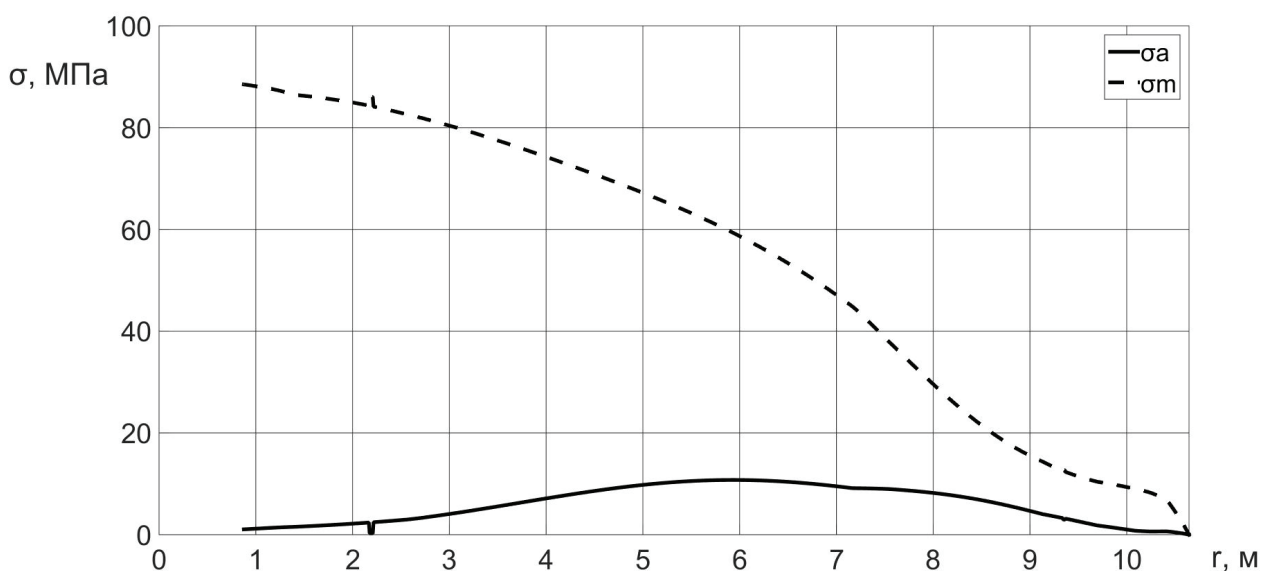


Рис. 16. Розподіл максимальних амплітудних і середніх напружень по довжині лопаті

Рівень цих напружень суттєво впливає на темп витрати ресурсу лопаті вертольота.

Практика проектування вертольота показує, що досить надійні лопаті можуть бути створені тільки в тому випадку, якщо жодна з її власних частот не збігається з частотами зовнішніх сил і знаходиться від них на достатньому видаленні. Це відноситься до коливань лопаті в площині як найменшої, так і найбільшої жорсткості. Слід зазначити, що не всі гармоніки зовнішніх сил небезпечні для міцності, а тільки ті, величина яких є достатньою для створення істотних за величиною напружень. Зазвичай відсутність резонансів має бути забезпечено для гармонік не вище восьмої. Вищі гармоніки зовнішніх сил несуттєві.

У трансмісії вертольота можлива поява у валах неприпустимо великих згинальних і крутильних коливань і навіть втрата їх стійкості. Змінний характер навантаження конструкції викликає накопичення втомних пошкоджень і швидке витрачання її ресурсу.

Лопаті гвинтів можуть піддаватися численним формам флатера, обумовленим взаємозв'язком різних її рухів у площинах змаху і обертання, закручування, а також пружністю системи керування гвинта.

Для вертольота характерний так званий земний резонанс. Унаслідок коливань лопатей несучого гвинта в площині обертання центр ваги гвинта рухається по замкнутій кривій з певною частотою, яка може бути близькою до частоти коливань вертольота на шасі (звідси походження терміна) або в польоті до частоти власних коливань фюзеляжу (тоді це явище називають повітряним резонансом).

Земний резонанс може виникнути на землі через великі збурення, що діють на вертоліт. Наприклад, при рулінні по смузі та наїзді лівим колесом на нерівність лопаті вертольота можуть отримати великі повороти щодо вертикальних шарнірів (рис. 17, вид зверху на вертоліт). Відцентрова сила $F_{цб}$ викликає інтенсивні поперечні коливання фюзеляжу, які ще більше розгойдують лопаті щодо вертикальних шарнірів. Відцентрова сила стає ще більше, і виникають самоколивання. Фюзеляж спирається на землю за допомогою пружних елементів шасі (рис. 18).

Вертикальні та горизонтальні пружини моделюють пружні властивості шасі вертольота. На рисунку показано одну з форм коливань, при якій поворот фюзеляжу відбувається відносно точки O_2 , розташованої вище центру мас C вертольота.

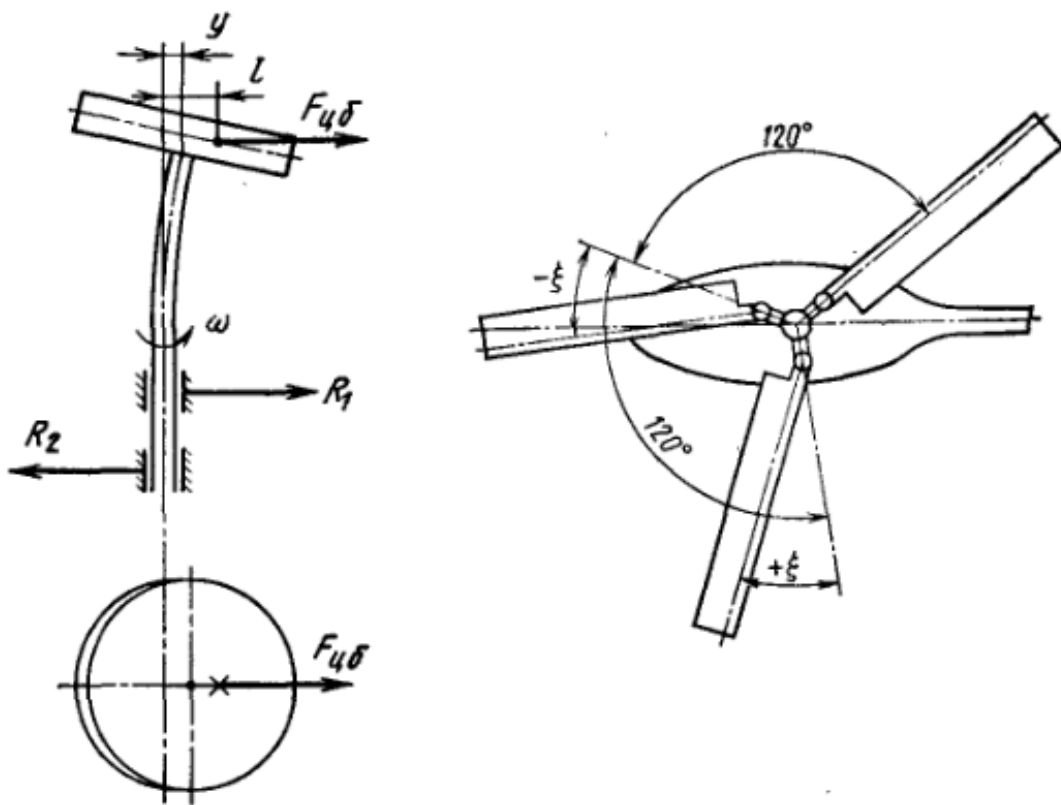


Рис. 17. Земний резонанс вертольота

Взаємодія поперечних коливань фюзеляжу і коливань лопатей щодо шарнірів їх кріплення до втулки гвинта можуть швидко призвести до руйнування і навіть перекидання вертольота.

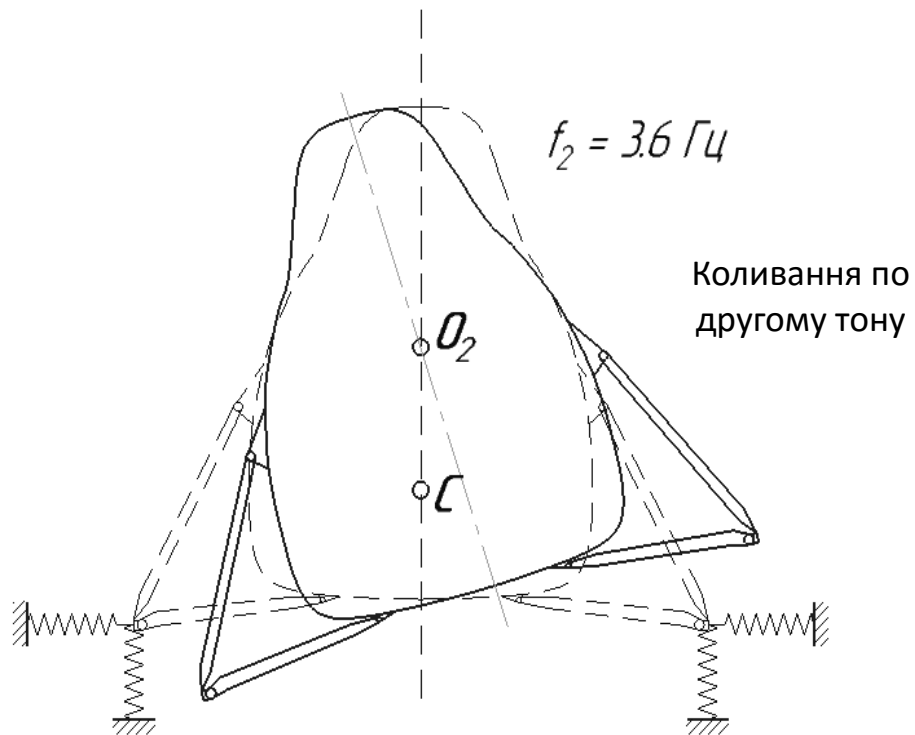


Рис. 18. Поперечні коливання фюзеляжу на пружному шасі

Подана вище коротка характеристика небезпечних явищ аеропружності вказує на необхідність детального аналізу навантаження конструкції. Роль розрахункових методів зважаючи на складні процеси в конструкції, як показує практика проектування ЛА, тільки зростає.

Основну увагу далі приділимо дослідженню динамічної реакції літаків транспортної категорії при польоті в турбулентній атмосфері.

Вивчення навантаження конструкції, деформування і руху літака при польоті в неспокійній атмосфері – одне з найважливіших завдань аеропружності. У льотній практиці зафіксовані численні випадки аварій і катастроф літаків, що зумовлені впливом турбулентної атмосфери. Внаслідок впливу на ЛА поривів вітру можливі руйнування конструкції через великі одноразові навантаження або дію змінних навантажень, а також вихід літака на нестійкі режими польоту. Для запобігання подібним випадкам в авіаційних правилах (АП) існують вимоги про необхідність перевірки міцності ЛА, урахування впливу швидкості прикладання навантажень і динамічних характеристик літака в умовах дії турбулентної атмосфери. Особливо актуальні ці завдання для важких літаків транспортної категорії.

Фізичне моделювання впливу атмосферної турбулентності на ЛА – це тривалий і дорогий процес, обмежений в силу своїх можливостей у відтворенні явища в повному обсязі. Існує метод визначення навантажень, що діють на ЛА при дії турбулентної атмосфери, на основі використання простих аналітичних залежностей. Однак цей підхід не дозволяє детально врахувати вплив великої кількості чинників, наприклад пружності конструкції та її динамічних властивостей, на реакцію ЛА.

Більш широкі можливості має математичне моделювання, яке є досить універсальним і дозволяє:

- застосовувати на ранніх стадіях проектування розрахункові методи аналізу і реалізовувати концепцію випереджаючого функціонування математичної моделі, яка доповнює експериментальні методи дослідження;

- проводити широкі параметричні дослідження щодо впливу параметрів на вигляд ЛА;

- вирішувати за допомогою одного комп'ютера зі спеціалізованим програмним комплексом цілий клас задач, що мають однаковий математичний опис;

- забезпечувати простоту переходу від однієї задачі до іншої внаслідок зміни значень параметрів досліджуваної системи, різних збурень

і початкових умов;

– моделювати систему по частинах завдяки її декомпозиції.

Математична модель – це абстрактний формально описаний об'єкт, який вивчають на основі математичних методів, включаючи математичний експеримент, за допомогою сучасної комп'ютерної техніки. Разом із тим складність і різноманітність процесів не дозволяють відобразити всі їх властивості. Відзначимо, що математична модель у змозі охопити лише основні найбільш характерні закономірності.

У рамках концепції випереджаючого розвитку математичної моделі явища і математичного моделювання створення адекватної моделі процесу навантаження з урахуванням пружності конструкції – актуальна задача, вирішення якої сприяє подальшому розвитку методики і техніки обчислювального експерименту. Все це дозволяє значною мірою скоротити витрати ресурсів у процесі проектування і розроблення нових типів авіаційної техніки (АТ).

При побудові ММ аеропружності ЛА деформація конструкції розкладається за власними функціями, що відображає пружні властивості конструкції в інтегральному сенсі без урахування її локальних особливостей (концентрації напружень, впливу роботи силової установки і т. ін.). Слід зазначити, що проблема створення адекватної ММ процесу навантаження з урахуванням пружності конструкції – трудомістка задача і успіх обчислювального експерименту залежить від її вирішення.

Мета посібника – дослідити динаміку руху літака і навантаження конструкції крила великого подовження, викликані впливом атмосферної турбулентності у вигляді вертикального пориву. У посібнику основна увага приділена питанням поведінки конструкції як пружної системи під дією розподілених нестационарних навантажень.

При формуванні ММ динаміки навантаження ЛА доцільно використовувати прикладні пакети програм, такі, як Mathcad і Matlab. Сучасні розрахункові методи, що покладені в основу їх роботи, дозволяють вирішувати широкий спектр проблем динаміки ЛА.

1. ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ТА НАВАНТАЖЕННЯ ЛА В НЕСПОКІЙНІЙ АТМОСФЕРІ

У Нормах льотної придатності для літаків транспортної категорії вказані вимоги щодо аналізу динамічного навантаження літака. Під динамічним навантаженням літака розуміють навантаження, яке зумовлено дією не тільки зовнішніх сил, але і сил, що виникають унаслідок

пружних коливань конструкції. Динамічне навантаження звичайно виникає при польоті в неспокійному повітрі, при посадці і пробігу по аеродрому, при дисбалансі двигуна, що втратив лопать. На військових літаках динамічне навантаження виникає при дії ударної хвилі вибуху, при пострілах з озброєння, при катапультиванні та ін.

Перші рішення проблем динамічного навантаження літака були здійснені ще в 40-х роках минулого століття [2, 4]. Вимога щодо обов'язкового проведення динамічного аналізу від поривів і при посадці важких літаків записана в зарубіжних і вітчизняних нормативних документах [1].

Згідно з ними треба розглянути всі висоти польоту і весь діапазон польотних мас літака при відповідному експлуатаційному центруванні і найбільш несприятливому завантаженні літака, щоб підтвердити міцність тієї чи іншої його частини. Динамічне навантаження на кожен частину конструкції має визначатися з урахуванням нестационарності аеродинамічних сил і реальних степенів вільності конструкції, включаючи рух літака як твердого тіла. Для літаків із системою автоматичного управління (в тому числі із системою зниження навантажень або демпфірування пружних коливань конструкції) мають бути враховані найбільш несприятливі з точки зору навантаження параметри цієї системи і взяті до уваги нелінійності її характеристик на високих рівнях навантажень.

За необхідності, а також для нетрадиційних схем конструкцій результати розрахунку мають підтверджуватися експериментом і випробуваннями в аеродинамічних трубах.

Необхідно підкреслити, що задача визначення динамічної реакції ЛА на дію турбулентної атмосфери тісно пов'язана з задачею стійкості конструкції. Коли реакція конструкції на кінцеве збурення обмежена, то конструкція є стійкою. Але в міру зростання швидкості польоту при деякій критичній швидкості реакція ЛА на те саме збурення стає нейтрально стійкою і розпочинається флатер конструкції.

Існує, однак, дуже важлива відмінність між задачами реакції і стійкості щодо можливості лінеаризації при математичному формулюванні фізичної задачі. При дослідженні стійкості пружна деформація може вважатися нескінченно малою і лінеаризація рівнянь виправдана. В задачах реакції необхідно часто розглядати абсолютні значення величини деформації і напружень у конструкції. Отже, коли реакція має кінцеву величину, необхідно брати до уваги ефекти нелінійності. Тому питання

щодо лінеаризації основних рівнянь завжди є відкритими. Дослідження нелінійних рівнянь часто стає неможливим внаслідок математичних ускладнень, і ми тоді вимушені спростувати задачу шляхом її лінеаризації.

Більшість задач щодо визначення динамічного навантаження відноситься до так званих прямих задач, коли для заданих розрахункових умов (наприклад, величини пориву у польоті або вертикальної сили при посадці) розраховується система діючих сил. Ця система сил є необхідною в процесі проектування літака. У випадку, якщо динамічні навантаження виявляються найбільш важкими, їх використовують і при статичних випробуваннях конструкції.

Але є і ряд зворотних задач, коли для одиничного впливу визначають динамічну реакцію літака, наприклад, у вигляді максимальних згинальних моментів. За згинальними моментами на основі відомої міцності конструкції розраховують величину припустимого впливу.

Слід відмітити, що розвиток розрахункових методів динамічного аналізу відбувався відповідно до розвитку Норм міцності, які періодично доповнювалися і змінювалися. Так, у Норми міцності цивільних літаків 1961 року було внесено вказівку щодо необхідності врахування динамічного навантаження конструкції при дії як однократного, так і ряду циклічних вертикальних поривів. Це привело до створення методів вирішення задачі щодо симетричних коливань літака з часом.

Вказівка про необхідність розгляду дії бокових поривів привело до розрахунку кососиметричних коливань літака.

У подальшому в Нормах міцності виникла вимога розгляду безперервної турбулентності. Тривала їх дія на ЛА збуджує в конструкції слабо задемпфировані пружні коливання. Для вирішення цієї проблеми застосовують методи вирішення у частотній області – визначають передавальні функції і кореляційні залежності динамічних навантажень.

Впровадження на ЛА автоматичних пристроїв – автопілотів, автоматичних систем керування, систем поліпшення стійкості та систем зниження навантажень привели до формування в Нормах міцності нових вимог щодо розроблення алгоритмів розрахунку динамічної реакції конструкції.

Одним із найбільш відповідальних етапів в аеропружності є створення математичної моделі явища. Обмежимося в даній роботі розв'язанням проблеми динамічного навантаження літака при дії на нього висхідного вертикального пориву. Дослідимо динамічну реакцію літака на дію атмосферної турбулентності на основі математичного моделювання

явища та числового експерименту на ПЕОМ.

Така нестационарна задача аеропружності може бути вирішена за допомогою нестационарної аеродинаміки, теорії пружності, коливань і стійкості пружних систем і рівнянь динаміки польоту (рис. 19).

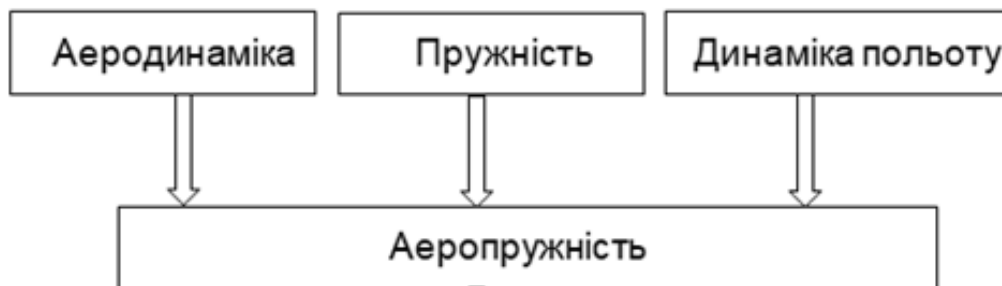


Рис. 19. Взаємодія базових наук при формуванні нестационарної задачі аеропружності

Основну увагу в посібнику приділено літакам із крилом великого подовження, для конструкції яких підходить балкова схематизація [2, 5]. Як розрахункову пружну модель у загальному випадку використовують просторову систему пружних балок. Отже, крило, фюзеляж, вертикальне і горизонтальне оперення моделюються пружними балками, що мають певну жорсткість на згин і кручення.

При вирішенні задачі динаміки руху і коливання конструкції ЛА використовують метод заданих форм: конструкцію розглядають як пружну, а її деформації наводять як комбінацію заданих форм вільних коливань. Форми і частоти власних коливань конструкції в загальному випадку слід визначати для вільного незакріпленого літака. Можливість використання зацемлених балок як розрахункових схем конструкції має досліджуватися окремо. За наявності у літака площини симетрії форми і частоти власних коливань розкладають на симетричні та антисиметричні, які можна визначати незалежно, враховуючи у розрахунках тільки половину літака.

Значну частину інформації щодо аеродинамічних характеристик літаків, особливо на стадії проектування, отримують за допомогою обчислювальної аеродинаміки. Вона дає унікальні можливості широкого перегляду і оптимального вибору геометричних характеристик елементів літака. Числові методи можуть давати більш-менш повну інформацію про аеродинамічні характеристики літаків та їх елементів залежно від повноти математичної моделі, яка описує течію повітря і його взаємодію з рухомими в ньому тілами.

Аеродинамічні сили від зовнішніх впливів при коливаннях конструкції

будемо визначати згідно з гіпотезою квазістаціонарності. Скористаємося лінійною аеродинамічною моделлю обтікання ЛА, вважаючи, що місцеві кути атаки потоку, що набігає, є малими. Застосування методів нестаціонарної аеродинаміки передбачає більш складні та трудомісткі обчислення.

Для крил великого подовження, особливо малої стрілоподібності, обтікання перерізів будемо вважати близьким до плоского обтікання. Це дозволяє достатньо просто знайти місцеве повітряне навантаження, що залежить від збуреного руху ЛА та деформації його конструкції.

Будемо вважати, що ЛА виконує сталий горизонтальний політ. На літак у деякий момент часу діє симетричний вертикальний висхідний порив. Зовнішні аеродинамічні сили при дії пориву викликають просторовий збурений рух літака – переміщення центру мас ЛА і обертання навколо його центру мас. Нестаціонарні сили, що діють на конструкцію, збуджують коливання в конструкції. Збурений рух ЛА впливає на характер його обтікання, змінюються зовнішні аеродинамічні сили і характер їх розподілу.

Таким чином, у результаті взаємодії аеродинамічних, пружних та інерційних сил і викликаних ними деформацій літака в конструкції виникають пружні коливання, які можуть шкідливо діяти на екіпаж і пасажирів, бути причиною руйнування конструкції.

Дослідження динаміки конструкції має вирішуватися на основі спільного вирішення рівнянь динаміки польоту ЛА, аеродинамічного навантаження і деформування конструкції.

1.1. Аеродинамічне навантаження ЛА

Визначення аеродинамічних сил, що діють на пружний ЛА при його збуреному русі, викликаному дією пориву, – це досить складна математична задача. Необхідно враховувати не тільки просторовий збурений рух апарата як жорсткого тіла, але і його деформування. Крім того, аеродинамічні сили залежать від всієї передісторії обтікання, яка зберігається у вихровому сліді.

Аеродинамічні сили від зовнішніх впливів з урахуванням деформування і коливань часто обчислюють за гіпотезою квазістаціонарності, а також на основі більш складної і трудомісткої нестаціонарної аеродинаміки. У першому випадку вважають, що сили залежать тільки від розподілу по поверхні ЛА місцевих кутів атаки і не залежать від передісторії руху.

Нерідко обтікання ЛА супроводжується відривними течіями. Тоді розподілені аеродинамічні сили визначають на основі нелінійної нестационарної аеродинаміки.

Нестационарні аеродинамічні характеристики збуреного руху ЛА при попаданні в порив визначимо на основі гіпотези квазістационарності. Розрахунок обтікання ЛА будемо проводити у лінійній постановці. Вважаємо, що кути атаки та ковзання всього ЛА та місцеві кути атаки на поверхні, що викликані збуреним рухом і деформацією літака, є малими.

При русі літака в повітрі на нього діють дотичні сили тертя і нормальні сили тиску. Ці розподілені по поверхні літака аеродинамічні сили можна звести до результуючої (сумарної) силі \vec{R} , яку прийнято називати повною аеродинамічною силою. Сила \vec{R} створює відносно центру мас літака момент \vec{M} , під дією якого літак може змінювати кути атаки і ковзання. Замість повної аеродинамічної сили і моменту зазвичай розглядають їх складові, тобто проекції на осі координат.

При вивченні аеродинаміки і динаміки літака найбільш часто використовують дві прямокутні системи координат: швидкісну $O_{x_a y_a z_a}$ і зв'язану O_{xyz} (рис. 20), початок яких поєднаний з центром мас.

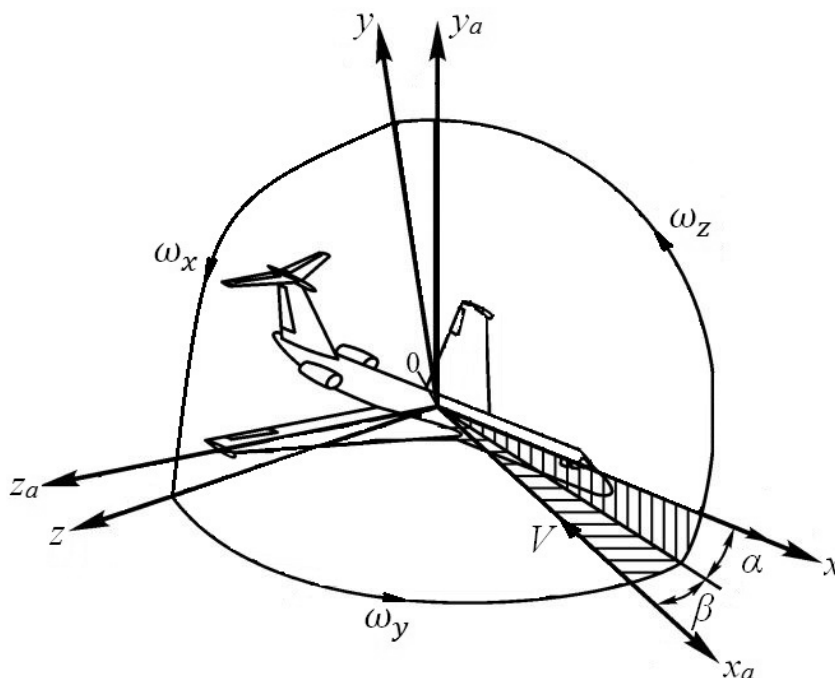


Рис. 20. Швидкісна і зв'язана системи координат

У швидкісній системі швидкісна вісь Ox_a спрямована уздовж вектора швидкості польоту літака V , вісь Oy_a перпендикулярна напрямку польоту

і лежить у площині симетрії літака, а бічна вісь Oz_a – перпендикулярна першим двом осям і спрямована в бік правої половини крила.

Зв'язана система координат жорстко скріплена з літаком, нерухома відносно останнього і повертається разом із ним. У ній поздовжня вісь Ox спрямована вздовж осі літака вперед, нормальна вісь Oy лежить у площині симетрії, поперечна вісь Oz перпендикулярна площині симетрії і спрямована в сторону правої половини крила.

Положення літака щодо вектора швидкості повністю визначається двома кутами: кутом атаки α і кутом ковзання β (рис. 20). Кутом атаки літака називається кут між поздовжньою віссю Ox (віссю літака) і проекцією вектора швидкості на площину симетрії. Кутом ковзання називається кут між вектором швидкості і площиною симетрії літака.

Рух літака в загальному випадку визначається вектором поступальної швидкості V і вектором кутової швидкості ω . Проекції цих векторів на зв'язані осі координат позначаються V_x, V_y, V_z і $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ відповідно. Кутові швидкості обертання вважають позитивними, якщо при погляді з кінця координатних осей обертання спрямовані проти годинникової стрілки.

Повна аеродинамічна сила літака та її складові в швидкісній і зв'язаній системах координат зображені на рис. 21.

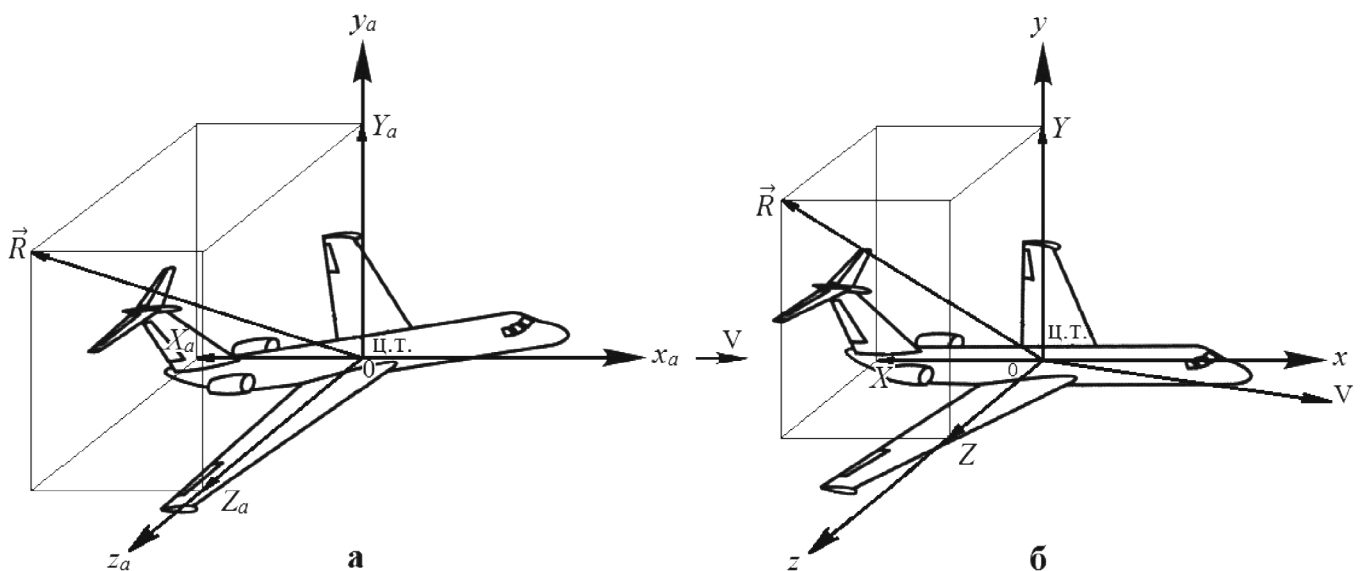


Рис. 21. Повна аеродинамічна сила літака та її складові:
а – в швидкісній; б – у зв'язаній системах координат

Проекціями сили \vec{R} на осі швидкісної системи координат є сили лобового опору X_a , піднімальна Y_a та бокова Z_a . Проекціями сили \vec{R} на

осі зв'язаної системи координат є поздовжня X , нормальна Y і поперечна Z сили.

В аеродинаміці найчастіше розглядають проекції вектора моменту M на осі зв'язаної системи координат (рис. 22).

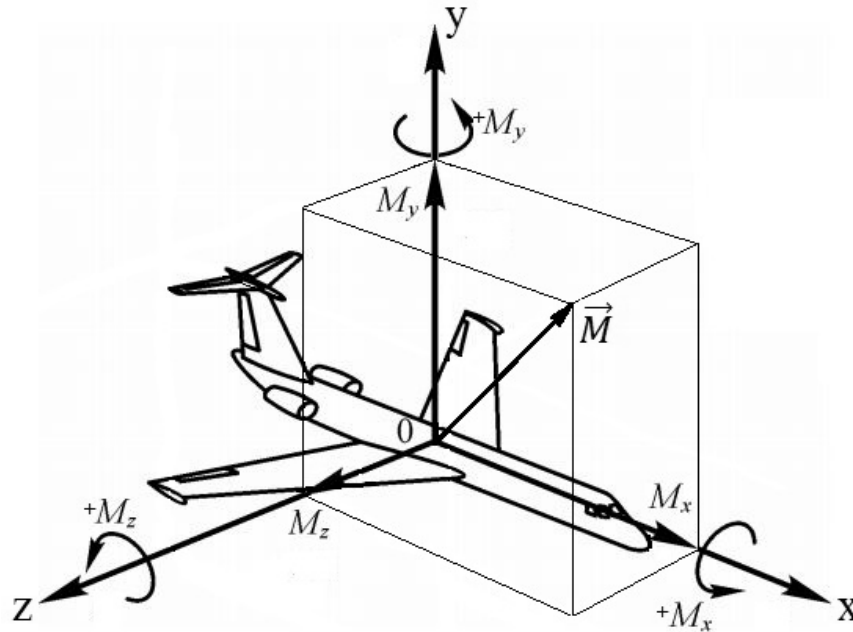


Рис. 22. Аеродинамічний момент літака і його складові в зв'язаній системі координат

Величини аеродинамічних сил і моментів залежать від багатьох чинників: від форми і розмірів літака, швидкості й висоти польоту, кутів атаки і ковзання, кутових швидкостей обертання і т. ін.

Введемо безрозмірні коефіцієнти пропорційності (аеродинамічні коефіцієнти), тоді в швидкісній системі координат маємо

$$X_a = C_{xa}qS; \quad Y_a = C_{ya}qS; \quad Z_a = C_{za}qS, \quad (1)$$

де C_{xa} , C_{ya} і C_{za} – коефіцієнти лобового опору, піднімальної та бокової сили;

$q = \rho V^2/2$ – швидкісний напір;

S – площа крила.

Аналогічно через безрозмірні коефіцієнти в зв'язаній системі координат виражаються і складові моменту

$$M_x = m_x qSl; \quad M_y = m_y qSl; \quad M_z = m_z qSb_A, \quad (2)$$

де m_x , m_y і m_z – коефіцієнти моменту крену, рискання і тангажа відповідно; l – розмах крила, b_A – середня аеродинамічна хорда.

Симетричний порив спричиняє поздовжній рух літака. При поздовжньому русі літака обчислимо коефіцієнти піднімальної сили і поздовжнього моменту крила і горизонтального оперення в системі літака для літака в цілому, розрахованих для висоти і швидкості горизонтального польоту. Маємо залежності

$$C_y = f(\alpha; H; M_\infty);$$

$$m_z = f(\alpha; H; M_\infty).$$

На лінійній ділянці залежності $C_y(\alpha)$ можна записати:

$$C_y = C_{y0} + C_y^\alpha(\alpha - \alpha_0), \quad (3)$$

де $C_y^\alpha = \partial C_y / \partial \alpha$ – похідна коефіцієнта піднімальної сили за кутом атаки;

α_0 – кути нульового значення коефіцієнта піднімальної сили.

Похідна C_y^α залежить від форми літака і критеріїв подібності.

Аналогічно

$$m_z = m_{z0} + m_z^\alpha(\alpha - \alpha_{0m}), \quad (4)$$

де $m_z^\alpha = \partial m_z / \partial \alpha$ – похідна коефіцієнта моменту тангажа за кутом атаки;

α_{0m} – кут нульового моменту тангажа (в загальному випадку $\alpha_{0m} \neq \alpha_0$).

При малих значеннях C_y можна записати:

$$m_z = m_{z0} + m_z^{C_y} C_y, \quad (5)$$

де $m_z^{C_y} = \partial m_z / \partial C_y$ – похідна коефіцієнта моменту тангажа за коефіцієнтом C_y .

Похідні m_z^α і $m_z^{C_y}$ залежать від форми літака, положення осі приведення (наприклад, центру мас) і числа M і не залежать (на лінійній ділянці) від кута атаки і коефіцієнта C_y . Коефіцієнт m_{z0} залежить від форми літака і числа M . Зауважимо, що коефіцієнти m_z , m_z^α і $m_z^{C_y}$ слабо залежать від кута ковзання.

Похідна коефіцієнта піднімальної сили літака за кутом атаки можна виразити через коефіцієнти піднімальної сили крила (без горизонтального оперення) $C_{y_{\text{без го}}}^\alpha$ і оперення $C_{y_{\text{аго}}}^\alpha$:

$$C_{y_a}^\alpha = C_{y_{\text{абго}}}^\alpha + C_{y_{\text{аго}}}^\alpha \cdot \bar{S}_{\text{го}},$$

де $\bar{S}_{\text{го}}$ – відносна площа оперення

$$\bar{S}_{\text{го}} = S_{\text{го}} / S.$$

Для розв'язання задач аеропружності необхідно знати розподілені по поверхні ЛА зовнішні аеродинамічні сили, які залежать від місцевих кутів атаки потоку.

Крило є основним несучим елементом ЛА. Застосуємо метод плоских перерізів для визначення розподіленого навантаження стрілоподібного крила великого подовження (рис. 23). Вісь Oz спрямована паралельно осі жорсткості, а вісь Ox' – вздовж потоку.

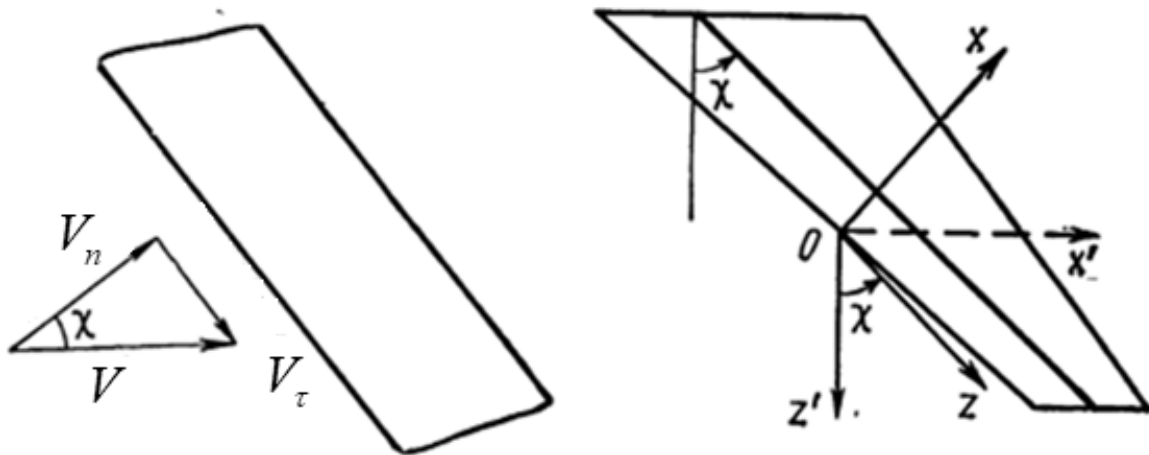


Рис. 23. Системи координат на стрілоподібному крилі

Набігаючий потік V розкладається на нормальну V_n і дотичну V_τ складові. Будемо враховувати тільки складову V_n . Швидкість V_τ спрямована вздовж осі жорсткості і перпендикулярна до перерізів крила. Вона мало впливає на аеродинамічні сили.

Вважаємо, що збурений рух літака відомий, а місцеві кути атаки є малими. Тоді для крила із стрілоподібністю χ (без урахування інтерференції між перерізами) погонна сила q_a і крутильний момент m_a у перерізах, перпендикулярних осі жорсткості, дорівнюють [5]

$$q_a = c_{y_{nep}}^\alpha \frac{\rho V^2}{2} \left[\alpha + b \left(\frac{3}{4} - \frac{\xi}{b} \right) \frac{\dot{\xi}}{V} \right] b; \quad (6)$$

$$m_a = q_a b \left(\frac{\xi}{b} - \bar{x}_a \right) - \frac{\pi k_M}{8} \cdot \frac{\rho V}{2} b^3 \dot{\xi} \cos \chi, \quad (7)$$

де $c_{y\text{ пер}}^\alpha$ – похідна коефіцієнта піднімальної сили перерізу крила за кутом атаки;

ρ – густина повітря;

$\vartheta(z,t)$ – кут повороту перерізу, який пов'язаний зі збуреним рухом ЛА, його деформацією і коливаннями;

\bar{x}_a – відстань від носка профілю до центру тиску, віднесена до хорди b ;

ξ – відстань від носка профілю до осі жорсткості, віднесене до хорди b ;

k_M – коефіцієнт, який враховує вплив стискання повітря.

Похідна коефіцієнта піднімальної сили для перерізів визначається через відомий розподіл циркуляції по крилу при заданому числі M :

$$c_{y\text{ пер}}^\alpha b = c_{y\text{ кр}}^\alpha b_{\text{сер кр}} \Gamma_{\text{кр}}(z),$$

де $c_{y\text{ кр}}^\alpha$ – похідна коефіцієнта піднімальної сили крила за кутом атаки;

$\Gamma_{\text{кр}}(z)$ – циркуляція по плоскому крилу при заданому числі M ;

$b_{\text{сер кр}}$ – середня хорда крила

$$b_{\text{сер кр}} = S_{\text{кр}} / (2l_{\text{кр}});$$

$l_{\text{кр}}$ – довжина балки крила;

$S_{\text{кр}}$ – площа крила, до якої віднесені аеродинамічні коефіцієнти.

Особливість деформації стрілоподібного крила полягає в тому, що вигин крила приводить до зміни кутів атаки поперечних перерізів крила, спрямованих уздовж потоку. Для аналізу впливу деформацій стрілоподібного крила на його обтікання розглянемо переріз 1–2 (рис. 24).

При вигині крила з позитивною стрілоподібністю в верх переміщення точки 1 менше переміщення точки 2, тому кут атаки перерізу (1–2) зменшується на величину

$$\Delta\alpha = -\frac{\partial y}{\partial z} \sin \chi,$$

де $\Delta\alpha$ – зміна кута атаки по потоку.

При вигині крила вниз кути атаки перерізів збільшуються. Вигин крила з негативною (зворотною) стрілоподібністю приводить до протилежного результату.

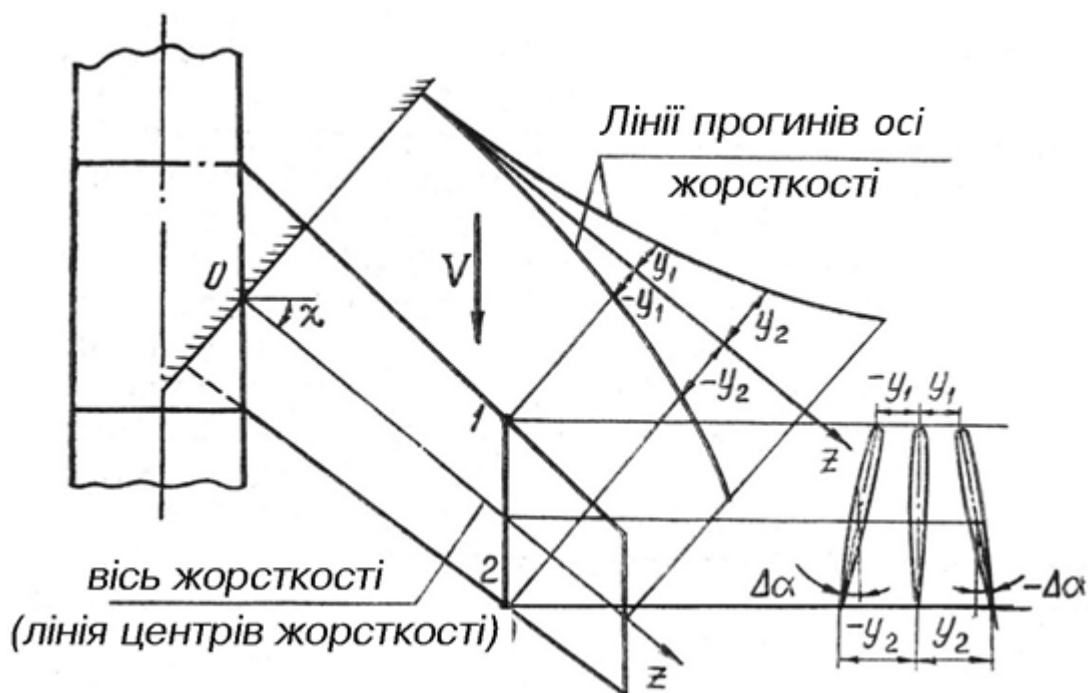


Рис. 24. Деформація стрілоподібного крила

При вигині стрілоподібного крила кути атаки кінцевих перерізів зменшуються, а кореневі збільшуються (для збереження незмінної загальної піднімальної сили). Це приводить до перерозподілу навантаження (скидання навантаження з кінців крила) і переміщення вперед аеродинамічного фокуса і, як наслідок, до зменшення статичної стійкості літака.

Місцевий кут атаки перерізу крила з урахуванням деформації згину крила $\frac{\partial y}{\partial z}$ і швидкості деформації від коливань $\frac{\partial y}{\partial t}$ має вигляд

$$\alpha_n = \vartheta \cos \chi - \frac{\partial y}{\partial z} \sin \chi - \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Аналіз показує, що аеродинамічними силами на фюзеляжі при вертикальному русі можна знехтувати. Але при боковому русі сили на фюзеляжі можна порівняти з силами на вертикальному оперенні.

Стаціонарні аеродинамічні характеристики ЛА, відповідні сталому горизонтальному польоту літака, визначимо на основі емпіричних співвідношень з урахуванням аеродинамічного компонентування ЛА.

Задаємо такі параметри основних частин ЛА:

- геометричні параметри ізольованого фюзеляжу;
- геометричні параметри ізольованого крила;
- характеристики профілю крила;

- геометричні параметри ізолюваного горизонтального і вертикального оперення;
- геометричні параметри ізолюваних мотогондол (див. рис. 25, 26).

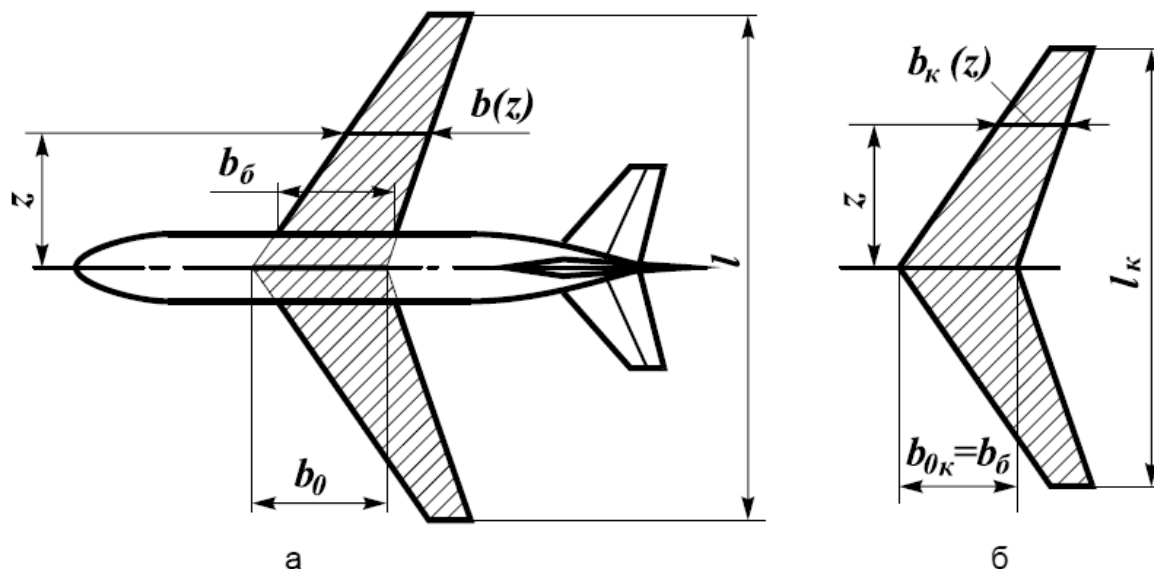


Рис. 25. Геометрія літака

Масовий момент інерції літака відносно центру мас визначаємо за статистичною формулою

$$J_z = M_{\text{пол}} \cdot (0,2 \cdot L_\phi)^2, \quad (8)$$

де $M_{\text{пол}}$ – маса літака, кг;

L_ϕ – довжина фюзеляжу, м.

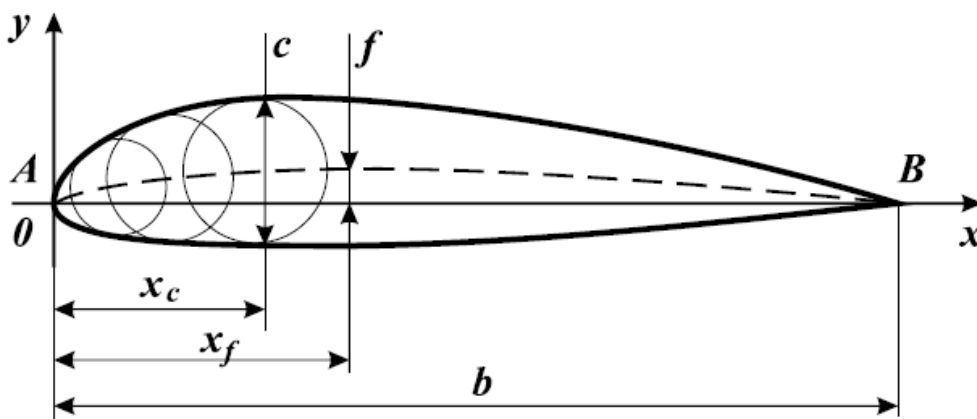


Рис. 26. Геометричні параметри профілю крила

При розрахунку стаціонарних аеродинамічних характеристик літак наведемо у вигляді комбінації простих тіл і врахуємо інтерференцію частин літального апарата (рис. 27).

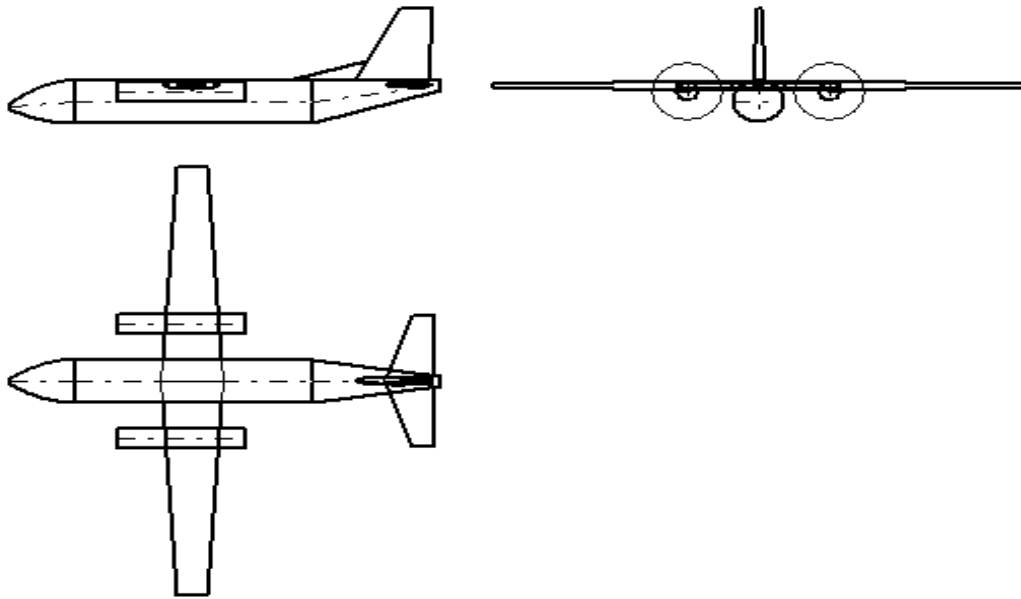


Рис. 27. Аеродинамічне компонування літака

Аеродинамічні характеристики, які необхідні для розрахунку динамічної реакції, наведені в табл. 2 (дані наведені для профілю крила з відносною товщиною 19%; крило літака не має аеродинамічного і геометричного скручування).

Таблиця 2 – Основні аеродинамічні характеристики літака

Найменування характеристики	Позначення	Значення
Характерна площа ЛА, м ²	$S_{ЛА}$	74,98
Похідна коефіцієнта піднімальної сили літака	C_y^α	4,862
Похідна коефіцієнта поздовжнього моменту літака	$m_z^{C_y}$	-0,2
Положення фокуса літака	$\frac{X_f}{L_\phi}$	0,449
Максимальний коефіцієнт піднімальної сили літака	$C_{y,max}$	1,139
Кут атаки літака при нульовій піднімальній силі, град	α_0	-1,43
Середня аеродинамічна хорда (САХ) крила, м	$b_{САХ}$	2,662
Положення центру мас літака	$X_{цм}/L_\phi$	0,403

Демпфірувальний момент тангажа літака оцінимо наближено. Він складається з демпфірувальних моментів горизонтального оперення, крила і фюзеляжу. Більшу частину демпфірувального моменту створює горизонтальне оперення, як найбільш віддалене від осі обертання.

Розглянемо виникнення демпфірувального моменту на горизонтальному оперенні. При обертанні літака з кутовою швидкістю ω_z (рис. 28) оперення, що знаходиться на відстані $L_{го}$ від центру мас літака, набуває додаткової швидкості $L_{го} \cdot \omega_z$

У результаті змінюється місцевий кут атаки оперення. Зміна кута атаки горизонтального оперення становить

$$\Delta\alpha_{го} \approx \frac{L_{го} \cdot \omega_z}{V_{го}}$$

Приріст піднімальної сили горизонтального оперення:

$$\Delta Y_{аго} = C_{ya\ го}^{\alpha} \cdot \Delta\alpha_{го} \cdot S_{го} \cdot q_{го}$$

Додатковий момент тангажа, викликаний обертанням літака:

$$\Delta M_{zго} = -\Delta Y_{аго} \cdot L_{го} = -C_{ya\ го}^{\alpha} \cdot \sqrt{k_{го}} \cdot \frac{S_{го} \cdot L_{го}^2}{b_A} \cdot q \overline{\omega_z},$$

де $\overline{\omega_z} = \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z$ – безрозмірна кутова швидкість тангажа літака.

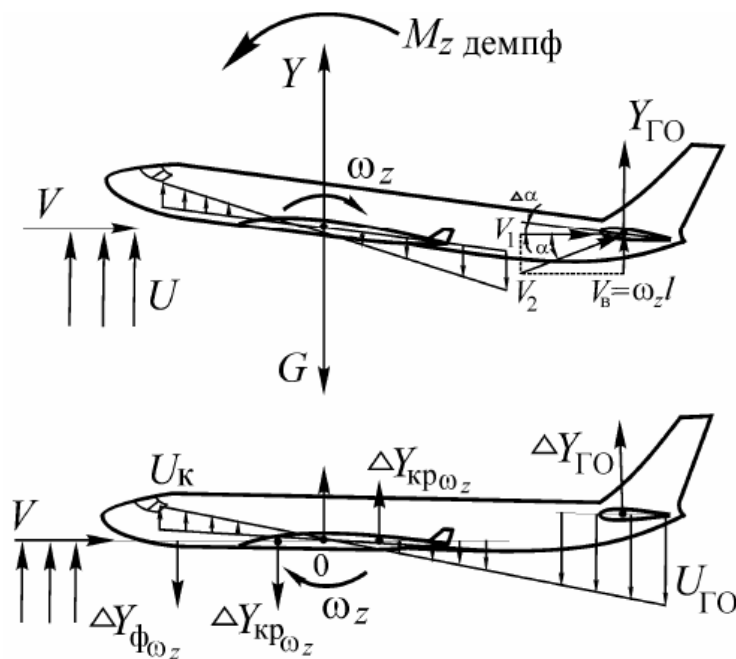


Рис.28. Виникнення моменту демпфірування літака

Як видно, момент $\Delta M_{z_{го}}$ на докритичних кутах атаки (коли $C_{ya_{го}}^\alpha > 0$) є демпфірувальним і діє в бік, протилежний обертанню. Поділивши рівняння на Sqb_A , отримаємо коефіцієнт демпфірування моменту тангажа горизонтального оперення

$$\Delta m_{z_{го}} = m_{z_{го}}^{\overline{\omega_z}} \cdot \overline{\omega_z} = m_{z_{го}}^{\overline{\omega_z}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \omega_z, \quad (9)$$

де $m_{z_{го}}^{\overline{\omega_z}}$ – часткова похідна коефіцієнта демпфірування моменту тангажа за безрозмірною кутовою швидкістю $\overline{\omega_z}$:

$$m_{z_{го}}^{\overline{\omega_z}} = -C_{ya_{го}}^\alpha \cdot \sqrt{k_{го}} \cdot B_{го},$$

де $B_{го} = \frac{S_{го} \cdot L_{го}^2}{S \cdot b_A^2}$ – безрозмірна величина моменту інерції площини горизонтального оперення відносно ЦМ літака. Похідна $m_{z_{го}}^{\overline{\omega_z}}$ на докритичних кутах атаки є від'ємною.

Дія пориву неспокоїного повітря зводиться до зміни вектора швидкості потоку, що обтікає літак. Це спричиняє появу додаткових місцевих кутів атаки і ковзання. При малих швидкостях пориву маємо

$$\Delta \alpha = U_y / V, \quad \Delta \beta = U_z / V, \quad (10)$$

де U_y та U_z – вертикальна і бокова складові пориву.

Існують два способи математичного опису неспокоїної атмосфери: в формі дискретних поривів і безперервної турбулентності.

Розглянемо вплив на ЛА одновимірного дискретного пориву. Вважаємо, що його швидкості змінюються вздовж одного фіксованого у просторі напрямку, наприклад, вздовж траєкторії сталого режиму польоту. Передбачається, що порив різко обмежений у просторі і миттєво охоплює ЛА.

При миттєвому охопленні ЛА поривом усі його точки набувають однакових додаткових кутів атаки. При поступовому вході ЛА у порив необхідно враховувати відносне переміщення літака і пориву.

Розповсюдження має подання дискретного висхідного пориву у формі нелінійного закону зміни його швидкості під назвою «одиниця мінус косинус» (рис. 29). Далі вертикальна складова пориву, що миттєво охоплює ЛА, не містить індекс у:

$$U(s) = U_{de} (1 - \cos(\pi s / h)) / 2 \quad \text{при } s \leq 2h; \\ U(s) = 0 \quad \text{при } s > 2h, \quad (11)$$

де U_{de} – інтенсивність пориву, яка залежить від висоти, швидкості та інших характеристик польоту, причому порив може бути спрямований як вертикально, так і горизонтально;

S – відстань, яку пройшов літак у пориві;

h – довжина ділянки зростання пориву.

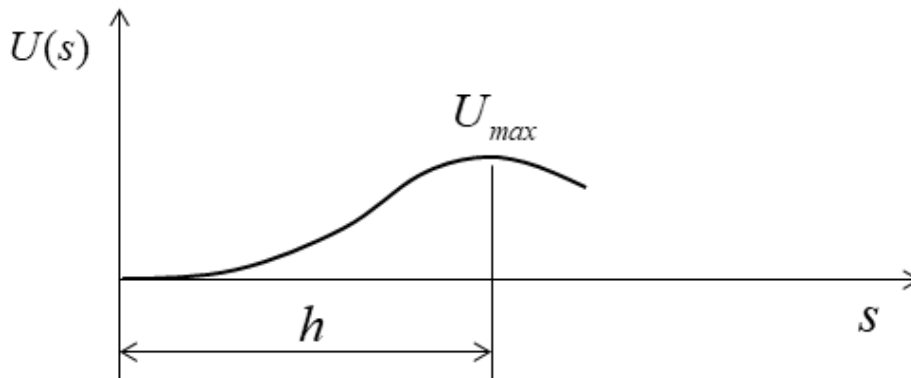


Рис. 29. Зміна вертикальної швидкості пориву за законом «одиниця мінус косинус»

Для того, щоб визначити максимальне навантаження ЛА при дії однократного пориву, потрібно варіювати довжину цієї ділянки, наприклад, від 10 до 100 м (точніше, від 30 до 350 футів). Якщо прийняти середню швидкість сучасного пасажирського літака 200 м/с, то час дії всього пориву становить 0,1 ... 1,0 с, що охоплює періоди декількох перших тонів власних коливань конструкції. Порив як би налаштовується на збудження цих тонів, тому він має назву – «turned gust».

Довжина ділянки зростання пориву звичайно вибирають з умови, що вітер підлаштовується до кожної з власних частот коливань літака (включаючи рух літака як твердого тіла) і задається такою, що дорівнює

$$h = (8 - 12,5)b,$$

де b – середня хорда крила.

Згідно з АП-25 при дослідженні динамічної реакції літака рекомендують задати форму пориву у вигляді

$$U(S) = \frac{U_{de}}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot S}{25 \cdot b}\right)\right). \quad (12)$$

Наприклад, відповідно до АП-25 максимальна швидкість пориву на крейсерській швидкості і висоті польоту $H = 12$ км становить $U_{max} = 9,57 \frac{M}{c}$ (рис. 30).

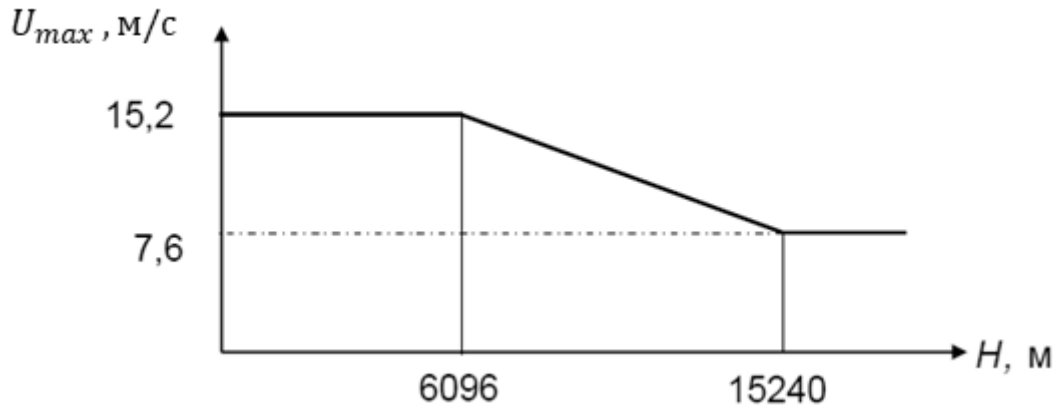


Рис. 30. Залежність швидкості пориву від висоти польоту

При дії пориву змінюється напрямок вектора швидкості, відповідно збільшується кут атаки ЛА. Приріст кута атаки стрілоподібного крила залежно від часу

$$\Delta\alpha(t) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{U_{de}}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot V \cdot t}{25 \cdot b}\right)\right)}{V \cdot \cos \chi} \right), \quad (13)$$

де V – крейсерська швидкість ЛА.

Приріст піднімальної сили ЛА наближено дорівнює

$$\Delta Y(t) = C_y^\alpha \Delta\alpha(t) S_{кр} \rho_H \frac{V^2}{2}, \quad (14)$$

де C_y^α – аеродинамічна похідна піднімальної сили ЛА за кутом атаки;

$\Delta\alpha(t)$ – приріст кута атаки ЛА, викликаний поривом;

$S_{кр}$ – площа крила;

ρ_H – густина повітря на висоті польоту;

V – швидкість незбуреного потоку.

Погонне аеродинамічне навантаження, пов'язане з впливом вертикального пориву, можна знайти за формулою

$$q_n(z, t) = \frac{\Delta Y(t)}{L_{кр}} \Gamma(z), \quad (15)$$

де $\Gamma(z)$ – коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу повітряного навантаження (відносна циркуляція);

$L_{кр}$ – розмах крила.

Важливим при вивченні динаміки обертання літака є визначення положення центру тиску і фокуса ЛА.

Центром тиску називається точка на поздовжній осі літака, через яку проходить лінія дії повної аеродинамічної сили літака. Аеродинамічним фокусом літака називається точка на поздовжній осі літака, до якої прикладено приріст піднімальної сили, що викликано малою зміною кута атаки. Тоді момент тангажа відносно осі, що проходить через фокус, залишається незмінним при малих змінах кута атаки. У загальному випадку фокус не збігається з центром тиску.

Введення поняття фокуса поряд із поняттям центру тиску зумовлено тим, що центр тиску літака може значно змінювати своє положення при зміні кута атаки, в той час як фокус зберігає незмінним своє положення, особливо на малих кутах атаки.

Координати центру тиску $x_{цт}$, фокуса x_{ϕ} і центру мас $x_{цм}$ зазвичай відраховують від носка середньої аеродинамічної хорди (САХ) (рис. 31).

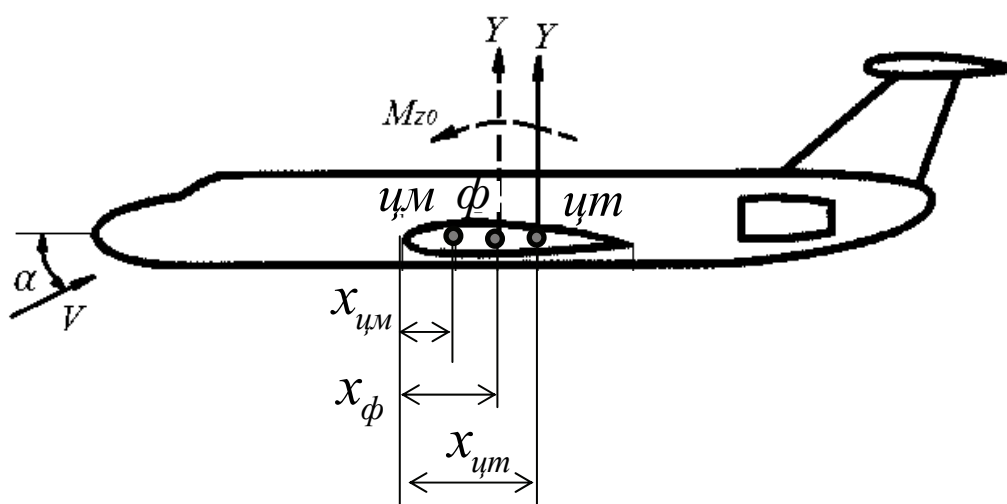


Рис. 31. Визначення положення центру мас (цм), центру тиску (цт) і фокусу (ф) крила відносно носка САХ

Середня аеродинамічна хорда – це усереднена за площею хорда крила

$$b_A = \frac{1}{S} \iint_S b' dS.$$

Середня аеродинамічна хорда b_A є хордою такого прямокутного крила, яке еквівалентне за площею до крила довільної форми в плані і має такі ж моментні характеристики, як і вихідне крило.

При не дуже великих кутах атаки піднімальна сила практично дорівнює нормальній ($Y_a \cong Y$), тому для моменту тангажа можна записати

$$M_z = M_{z0} + Y_a (x_{цт} - x_{\phi}), \quad (16)$$

Виразимо піднімальну силу і момент через аеродинамічні коефіцієнти

$$Y_a = C_y q S; \quad M_z = m_z q S b_A; \quad M_{z0} = m_{z0} q S b_A$$

і введемо безрозмірні координати

$$\bar{x}_{цм} = \frac{x_{цм}}{b_A}; \quad \bar{x}_F = \frac{x_F}{b_A}. \quad (17)$$

У результаті одержуємо

$$m_z = m_{z0} + C_y (\bar{x}_{цм} - \bar{x}_F), \quad (18)$$

Величина

$$\bar{x}_{цм} - \bar{x}_F = m_z^{C_y} - \quad (19)$$

це запас центрування, який впливає на характер короткоперіодичного руху ЛА.

При відхиленому органі управління на кут φ коефіцієнт моменту можна записати у вигляді:

$$m_z = m_{z0} + m_z^{C_y} C_y + m_z^{\varphi} \varphi. \quad (20)$$

Вихідними даними для подальших розрахунків динамічної реакції ЛА в горизонтальному польоту є аеродинамічні похідні для всього літака: $C_{y_a}^{\alpha}$, $C_{y_{aго}}^{\alpha}$, $m_z^{C_y}$, $m_{zго}^{\bar{\omega}_z}$ і аеродинамічні характеристики перерізів крила.

Розрахунки показують, що одноразові пориви дають досить важкі умови навантаження для крила і особливо для двигунів, підвішених на пілонах.

1.2. Динаміка збуреного руху ЛА як твердого тіла

Динаміка збуреного руху ЛА як твердого тіла від дії поривів вітру дає важливу інформацію щодо навантаження літака, оскільки лінійні й кутові прискорення літака сягають значних рівнів.

Проаналізуємо динаміку збуреного руху ЛА відносно сталого горизонтального польоту. На рис. 32 показано, як на літак, що виконував горизонтальний політ з перевантаженням $n_y = 1$, з моменту часу $t = 0$ на ЛА починає діяти висхідний порив.

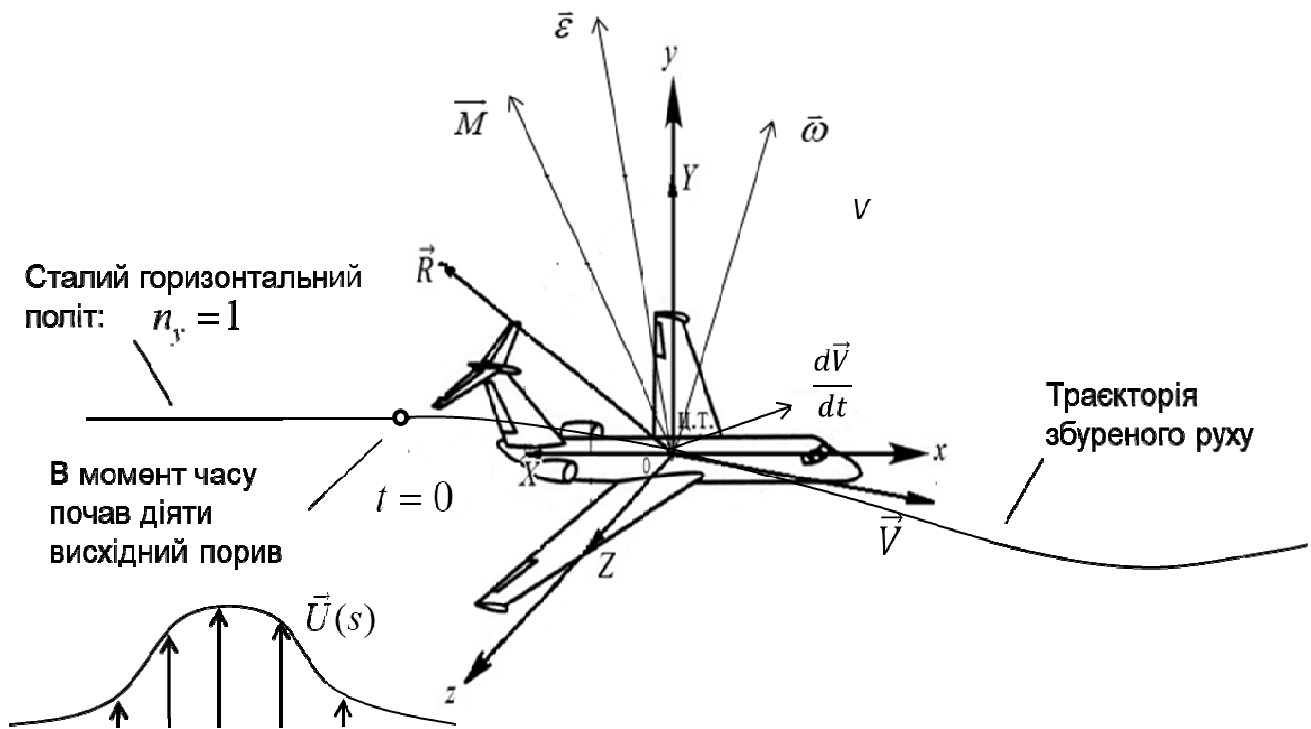


Рис. 32. Збурений рух ЛА

Вважаємо, що автопілот вимкнений і льотчик не втручається в управління літаком після попадання в порив. Тобто розглядаємо динаміку руху ЛА із «затисненими» рульовими поверхнями. Нестационарне навантаження ЛА викликає його збурений рух. Центр мас літака змінює своє просторове положення, одночасно розпочинається обертання ЛА навколо центру мас. На рисунку показані прискорення $\frac{d\vec{V}}{dt}$ і швидкість \vec{V} центру мас літака від дії вектора зовнішніх поверхневих сил \vec{R} (аеродинамічних, тяги двигуна), а також кутове прискорення $\vec{\epsilon}$ і швидкість $\vec{\omega}$, які викликані моментом \vec{M} . Просторове положення літака у загальному випадку характеризується кутами тангажа ϑ , крену γ та рискання ψ .

Місцеві кути атаки на несучих поверхнях змінюються з часом, в конструкції збуджуються пружні коливання всього літака, змінюється форма ЛА. Це, в свою чергу, впливає на аеродинамічне навантаження.

Рівняння руху центру мас літака і обертання навколо нього в інерціальній системі координат мають вигляд

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{R}_a + \vec{P} + \vec{G}; \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M},$$

де \vec{R}_a , \vec{P} , \vec{G} і \vec{M} – вектори аеродинамічних сил, тяги, сили тяжіння і головний момент відносно центру мас зовнішніх сил; \vec{K} - головний момент кількості руху твердого ЛА. Перше векторне рівняння проектується на неінерціальну швидкісну систему координат, а друге – на зв'язану вісь.

Скористаємося векторним рівнянням, яке пов'язує похідні деякого вектора \vec{a} в інерціальній і неінерціальній системах координат (формула Бура)

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a},$$

де $\frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt}$ – локальна похідна вектора в зв'язаній системі; $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості швидкісної системи координат. Пов'язана з літаком зв'язана система координат зазвичай близька до головних осей інерції літака.

Динамічні рівняння руху ЛА як твердого тіла можуть бути записані в такому вигляді [2, 5]:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{dV_x}{dt} + \omega_y V_z - \omega_z V_y \right) &= R_x + G_x; \\ m \left(\frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z \right) &= R_y + G_y; \\ m \left(\frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x \right) &= R_z + G_z; \\ I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x; \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x &= M_y; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \tag{21}$$

де $V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ – відповідно проекції лінійної і кутової швидкості ЛА на зв'язані осі координат $Oxyz$;

I_x, I_y, I_z – головні центральні моменти інерції літака;

R_x, R_y, R_z – проекції поверхневих сил (аеродинамічних і сил тяги двигунів) і масових сил ваги відповідно на зв'язані осі координат $Oxyz$;

M_x, M_y, M_z – проекції моментів, що діють на літак, на зв'язані осі координат $Oxyz$.

Проекції сил на осі зв'язаної системи координат у загальному випадку визначаються виразами

$$\begin{aligned} R_x + G_x &= P - X_1 - G \sin(\vartheta); \\ R_y + G_y &= Y_1 - G \cos(\vartheta) \cos(\gamma); \\ R_z + G_z &= Z_1 + G \cos(\vartheta) \sin(\gamma). \end{aligned} \quad (22)$$

При симетричному відносно площини Oxy пориві збурений рух відбувається в поздовжній площині. На рис. 33 показані сили, що діють на літак у цьому випадку. Проекції сил вказані для швидкісної системи координат.

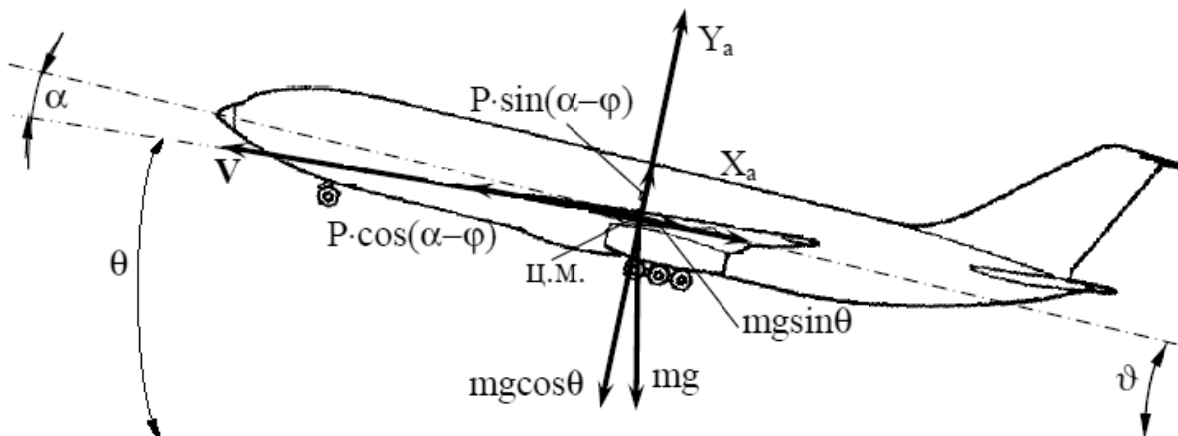


Рис. 33. Сили, що діють на ЛА в польоті.

Рішення диференціальних рівнянь (21) дозволяє знайти проекції кутової і лінійної швидкості на осі зв'язаної системи координат і відповідно визначити кути атаки і ковзання ЛА. Скористаємося кінематичними рівняннями Ейлера, що встановлюють зв'язок між кутовими швидкостями $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ і кутами тангажа, ристання і крену :

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z \cos(\gamma) + \omega_y \sin(\gamma); \quad (23)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_y \cos(\gamma) - \omega_x \sin(\gamma)}{\cos(\vartheta)}; \quad (24)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \operatorname{tg}(\vartheta) (\omega_y \cos(\gamma) - \omega_z \sin(\gamma)). \quad (25)$$

Припускаючи, що тяга двигуна спрямована уздовж осі Ox літака, а кут ковзання малий і його впливом на аеродинамічні сили можна знехтувати, перші три рівняння системи (21) можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
m \frac{dV}{dt} &= P \cos(\alpha) - X - G \sin(\theta); \\
mV\omega_{zk} &= Y \cos(\gamma) + P \sin(\alpha) - G \cos(\theta); \\
-m\omega_{yk}V &= Y \sin(\gamma).
\end{aligned} \tag{26}$$

Кутові швидкості ЛА дорівнюють

$$\omega_{zk} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{r_y}; \quad \omega_{yk} = \frac{d\psi}{dt} \cos(\theta) = \frac{V \cos^2(\theta)}{r_z}, \tag{27}$$

де r_y і r_z – радіуси кривини траєкторії відповідно у вертикальній і горизонтальній площинах. З урахуванням (26)

$$\begin{aligned}
m \frac{dV}{dt} &= P \cos(\alpha) - X - G \sin(\theta); \\
mV \frac{d\theta}{dt} &= Y + P \sin(\alpha) - G \cos(\theta); \\
I_z \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= \sum M_z; \\
\frac{dH}{dt} &= V \sin(\theta); \\
\vartheta &= \alpha + \theta.
\end{aligned} \tag{28}$$

Забезпечення поздовжньої рівноваги літака потребує виконання таких рівнянь:

$$\begin{aligned}
P \cos(\alpha) - X - G \sin(\theta) &= 0; \\
Y + P \sin(\alpha) - G \cos(\theta) &= 0; \\
\sum M_z &= 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

При розгляді ізольованого поздовжнього руху параметри бічного руху ($\beta, \gamma, \varphi, \omega_x, \omega_y$) зазвичай приймають такими, що дорівнюють нулю, а при вивченні бокового руху параметри поздовжнього руху $\alpha, \vartheta, V(M)$ вважаються постійними, а кутова швидкість $\omega_z = 0$.

Обмежимося розглядом поздовжнього короткоперіодичного руху при дії на ЛА одиночного вертикального пориву, який миттєво охоплює весь літак. Рівняння, що описують ізольований поздовжній рух, у зв'язаній системі координат запишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
m \left(\frac{dV_x}{dt} - \omega_z \cdot V_y \right) &= P - X_1 - G \sin \vartheta; \\
m \left(\frac{dV_y}{dt} + \omega_x \cdot V_z \right) &= Y_1 - G \cos \vartheta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= \sum M_z; \\
\frac{dH}{dt} &= V \sin \theta; \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z; \\
\vartheta &= \alpha + \theta.
\end{aligned}$$

У процесі малого поздовжнього руху в першому наближенні можна вважати швидкість і висоту польоту незмінними. У цьому випадку рівняння, що описує закон зміни швидкості, можна опустити з розгляду. Тоді систему, що описує поздовжній рух, можна записати у такому вигляді :

$$\begin{aligned}
mV \frac{d\vartheta}{dt} &= Y + P \sin \alpha - G \cos \theta; \\
I_z \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= M_z; \\
\vartheta &= \alpha + \theta,
\end{aligned} \tag{30}$$

де Y є функція кута атаки α , а поздовжній момент M_z – функція $\alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, \varphi$.

На рис. 34 показані пояснення щодо величини і напрямку лінійного прискорення центру мас при короткоперіодичному русі. Дійсно, вектор швидкості ЛА, спрямований вздовж осі Ox_a , не змінюється за величиною, як ми припустили. У зв'язку з обертанням літака з кутовою швидкістю $\frac{d\vartheta}{dt}$ приріст вектора швидкості $\Delta \vec{V}$ і є причиною прискорення

$\frac{d\vartheta}{dt} V$, спрямованого вздовж осі Oy_a :

$$\vec{a} \approx \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}}{\Delta t}; \quad \Delta V = \omega_z V; \quad a_{y_a} = \omega_z V = \frac{d\vartheta}{dt} V.$$

Надалі для спрощення запису рівнянь руху будемо припускати, що вихідний політ є горизонтальним ($\theta_0 = 0$), а кут атаки ЛА малий.

Отримана система навіть при прийнятих припущеннях є системою нелінійних диференціальних рівнянь, яка в загальному вигляді аналітично не розв'язується. Це змушує вдаватися до використання ЕОМ. Одним із найбільш поширених методів, що застосовують при дослідженні динамічних властивостей літака, є метод малих збурень. Застосування цього методу дозволяє нелінійну систему диференціальних рівнянь привести до лінійної системи.

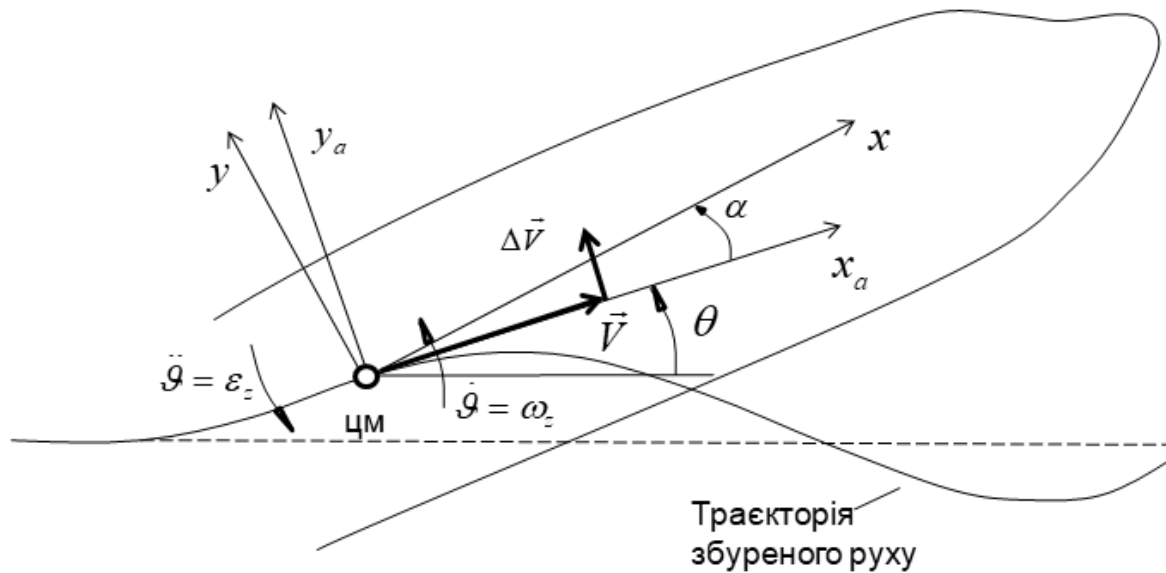


Рис. 34. Прискорення центру мас літака

Нехай вихідний незбурений поздовжній рух літака визначається параметрами $V_0, \alpha_0, \vartheta_0, \theta = 0, H_0, \rho_0$. Відповідно до методу малих збурень будемо припускати, що в процесі збуреного руху кути атаки, тангажа і нахилу траєкторії отримують невеликі збільшення $\Delta\alpha, \Delta\vartheta, \Delta\theta$ (швидкість і висота в процесі малого руху передбачаються незмінними). Тоді кожен із змінюваних параметрів руху, піднімальну силу і поздовжній момент можна уявити як суму двох складових:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \Delta\alpha; & Y &= Y_0 + \Delta Y; \\ \vartheta &= \vartheta_0 + \Delta\vartheta; & \theta &= \theta_0 + \Delta\theta; & M_z &= M_{z0} + \Delta M_z. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Оскільки вихідний політ усталений, то

$$\frac{d\alpha_0}{dt} = \frac{d\theta_0}{dt} = \frac{d\vartheta_0}{dt} = 0,$$

тому

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(\Delta\alpha)}{dt}; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d(\Delta\vartheta)}{dt}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\Delta\theta)}{dt}. \quad (32)$$

Оскільки приріст $\Delta\alpha, \Delta\vartheta, \Delta Y, \Delta M_z$ – малі величини, то уявімо збільшення піднімальної сили і поздовжнього моменту в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta Y &= Y^\alpha \Delta\alpha; \\ \Delta M_z &= M_z^\alpha \Delta\alpha + M_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_z^{\omega_z} \omega_z + M_z^\varphi \Delta\varphi. \end{aligned} \quad (33)$$

Підставляючи рівняння (31), (32) і (33) в систему (30), одержуємо таку систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
mV_0 \frac{d(\Delta\theta)}{dt} &= Y^\alpha \Delta\alpha + P\Delta\alpha + G; \\
I_z \frac{d^2(\Delta\vartheta)}{dt^2} &= M_z^\alpha \Delta\alpha + M_z^{\dot{\alpha}} \frac{d(\Delta\alpha)}{dt} + M_z^{\omega_z} \frac{d(\Delta\vartheta)}{dt} + M_z^\varphi \Delta\varphi.
\end{aligned} \tag{34}$$

У системі (34) двох диференціальних рівнянь відхилення стабілізатора $\Delta\varphi$ є керуючою функцією; а шуканими параметрами є $\Delta\alpha$, $\Delta\theta$ і $\Delta\vartheta$.

Для однозначності вирішення задачі скористаємося рівнянням зв'язку $\Delta\vartheta = \Delta\theta + \Delta\alpha$ і виключимо із системи одну із змінних. Так, підставимо до першого рівняння системи $\Delta\theta = \Delta\vartheta - \Delta\alpha$, одночасно розділимо це рівняння на mV_0 , а друге – на I_z . У результаті систему (34) можна привести до такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\Delta\vartheta)}{dt} &= \frac{d(\Delta\alpha)}{dt} + \frac{Y_0^\alpha}{mV_0} \Delta\alpha; \\
\frac{d^2(\Delta\vartheta)}{dt^2} - \frac{M_z^\alpha}{I_z} \Delta\alpha - \frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{I_z} \frac{d(\Delta\alpha)}{dt} - \frac{M_z^{\omega_z}}{I_z} \frac{d(\Delta\vartheta)}{dt} &= \frac{M_z^\varphi}{I_z} \Delta\varphi.
\end{aligned} \tag{35}$$

де $Y_0^\alpha = Y^\alpha + P$.

Виключаючи змінну $\Delta\vartheta$ підстановкою з першого рівняння $\frac{d(\Delta\vartheta)}{dt}$ в друге, отримуємо таке диференціальне рівняння, що визначає закон зміни кута атаки:

$$\frac{d^2(\Delta\alpha)}{dt^2} + 2n_\alpha \frac{d(\Delta\alpha)}{dt} + \Omega_\alpha^2 \Delta\alpha = n_\varphi \Delta\varphi, \tag{36}$$

де $n_\varphi = M_z^\varphi / I_z$, а характеристики затухання n_α і частоту власних коливань Ω_α визначають так:

$$\begin{aligned}
n_\alpha &= \frac{1}{2} \left(\frac{Y_0^\alpha}{mV_0} - \frac{M_z^{\dot{\alpha}} + M_z^{\omega_z}}{I_z} \right); \\
\Omega_\alpha^2 &= -\frac{M_z^\alpha}{I_z} - \frac{M_z^{\omega_z}}{I_z} \frac{Y_0^\alpha}{mV_0}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Як видно з виразів (37), коефіцієнт n_α визначається не тільки похідними моментів $M_z^{\omega_z}$ і $M_z^{\dot{\alpha}}$, що характеризують обертання літака навколо осі Oz, але й похідною Y_0^α , що збільшує демпфірування коливань літака при викривленні траєкторії.

Підставимо у вираз, що визначає частоту власних коливань Ω_α^2 , значення:

$$Y_0^\alpha = C_y^\alpha qS; M_z^\alpha = M_z^{C_y} C_y^\alpha = m_z^{C_y} Y_0^\alpha b_A; M_z^{\omega_z} = m_z^{\omega_z} qS b_A.$$

У результаті отримаємо

$$\Omega_\alpha^2 = -\frac{Y_0^\alpha}{I_z} b_A \left(m_z^{C_y} + m_z^{\omega_z} \frac{V}{b} \frac{\rho S b_A}{2m} \right).$$

Ураховуючи, що $m_z^{\omega_z} V/b_A = m_z^{\bar{\omega}_z}$, і позначаючи

$$\frac{2m}{\rho S b_A} = \mu,$$

де μ – відносна масова густина літака, отримаємо таке значення квадрата частоти власних коливань

$$\Omega_\alpha^2 = -\frac{Y_0^\alpha}{I_z} b_A \left(m_z^{C_y} + \frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{\mu} \right). \quad (38)$$

Таким чином, частота власних коливань ЛА визначається не тільки статичною характеристикою стійкості за перевантаженням $m_z^{C_y}$, але і додатковим членом $m_z^{\bar{\omega}_z}/\mu$, обумовленим динамікою руху літака. Сума

$$m_z^{C_y} + \frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{\mu} \quad (39)$$

називається запасом стійкості за перевантаженням.

1.3. Динаміка руху і пружні коливання літака при нестационарному навантаженні конструкції

Особливо складними при аналізі навантаження ЛА в процесі експлуатації є динамічні процеси, що відбуваються в конструкції літака. Унаслідок впливу на літак дискретних поривів часто виникають аварійні ситуації, які призводять до руйнування конструкції внаслідок великих одноразових перевантажень або в результаті дії впродовж певного часу відносно невеликих навантажень, накопичення від цього пошкоджень і втомного руйнування силових елементів літака. В окремих випадках через деформацію конструкції можуть виникати порушення в нормальній роботі різних систем і обладнання.

Динаміку руху і пружні коливання літака при нестационарному навантаженні конструкції від дії пориву визначають на основі математичної моделі динамічного явища аеропружності. Вивчення динамічної реакції літака передбачає заміну вихідного об'єкта його моделлю і подальше проведення розрахункових досліджень ММ на ПЕОМ. Це дає можливість, як показує практика, частково або повністю замінити натурні

випробування, підвищити ефективність льотних випробувань і значно скоротити терміни і вартість розробок. ММ аеропружності стають базовими при знаходженні статистичних характеристик зовнішніх навантажень для розрахунку надійності АТ й здійснення концепції її експлуатації за технічним станом, вирішенні питань технічної діагностики і контролю пошкоджень.

Динамічні задачі аеропружності вирішують, як правило, в два етапи. На першому, допоміжному етапі визначають форми і частоти власних коливань конструкції; на другому – вирішують основне завдання – визначення руху і навантаження пружної системи, а як узагальнені координатні функції (степеня вільності пружної конструкції) використовують знайдені на першому етапі форми і частоти власних коливань.

Як перший етап для оцінювання рівня навантаження конструкції при польоті в турбулентній атмосфері можна скористатися співвідношеннями норм льотної придатності і визначити перевантаження в центрі мас літака.

Рівень максимального перевантаження від пориву, що діє на літак, можна оцінити згідно зі статистичним співвідношенням норм льотної придатності [1]

$$n_{y\bar{0}} = 1 + \frac{\rho_0 V_i K_g U C_y^\alpha}{2gM/S}, \quad (40)$$

де V_i – індикаторна швидкість літака, яку обчислюють за співвідношенням

$$V_i = V \sqrt{\rho_H / \rho_0},$$

ρ_H – густина повітря на висоті польоту, кг/м³; ρ_0 – густина повітря на рівні моря, кг/м³;

V – дійсна швидкість;

U – ефективна швидкість пориву, залежить від висоти польоту, м/с;

K_g – коефіцієнт послаблення пориву, його розраховують за емпіричною формулою

$$K_g = \frac{0,88\mu_g}{5,3 + \mu_g};$$

μ_g – коефіцієнт маси літака

$$\mu_g = \frac{2(M/S)}{b_{\text{сеп}} \rho_H C_y^\alpha};$$

M/S – питоме навантаження на крило, кг/м²;

M – польотна маса літака;

S – площа крила в плані;

$b_{\text{сеп}}$ – середня геометрична хорда, м:

$$b_{\text{сеп}} = S / L,$$

L – розмах крила;

$g = 9,81 \text{ м} / \text{с}^2$ – прискорення вільного падіння;

C_y^α – похідна коефіцієнта піднімальної сили ЛА за кутом атаки, рад⁻¹.

Наведена аналітична залежність перевантаження в центрі мас $n_{y\delta}$ дозволяє легко оцінити рівень навантаження конструкції і проаналізувати вплив на нього параметрів польоту, геометричних і масових характеристик ЛА.

У посібнику далі буде визначено динамічну реакцію і перевантаження літака на дію пориву на основі побудованої ММ динамічного явища аеропружності. Перевантаження обчислюють не тільки в центрі мас, але і в довільних точках ЛА з урахуванням просторового руху літака й пружних коливань конструкції.

ММ динаміки і навантаження ЛА дозволяє детально дослідити в реальному масштабі часу збурений рух літака, проаналізувати перехідний процес реакції конструкції, провести широкі параметричні дослідження й запропонувати дієві заходи щодо зменшення рівня змінних напружень у конструкції (зміна масово-інерційних й жорсткісних характеристик конструкції, запасу стійкості ЛА, впровадження системи зниження навантажень і т.ін.).

Розрахунки навантаження ЛА проводять шляхом числового інтегрування рівнянь аеропружності за часом методом Рунге - Кутта, що дозволяє знайти залежності від часу узагальнених координат, їх перших та других похідних. Узагальнені координати – це параметри, що характеризують просторовий рух ЛА та його деформування. За узагальненими координатами визначається динамічне навантаження конструкції. При балковій схематизації пружних властивостей ЛА як характеристик навантаження конструкції зазвичай використовують внутрішні силові чинники в різних перерізах.

У багатьох випадках жорстка і дуже міцна конструкція непридатна за наявності змінних сил, у той час як більш легка і менш міцна сприймає ці зусилля без руйнувань. Тому питанню коливань і поведінки пружних систем під дією змінних навантажень необхідно приділяти особливу увагу.

Для здійснення коливання тіло повинно мати певну масу і пружність. Якщо пружне тіло вивести зі стану рівноваги з допомогою якого-небудь зовнішнього впливу, то сили пружності цього тіла не врівноважуються прикладеним навантаженням і виникають коливання.

Літак являє собою пружну систему з розподіленою масою і жорсткістю, змінною за довжиною конструкції. Така система має нескінченну кількість частот і відповідних їм форм власних коливань. Форма згинальних коливань – це форма пружної лінії (осі жорсткості конструкції) в момент її максимального відхилення від положення рівноваги.

Планер літака, взаємодіючи з довкіллям, може здійснювати пружні коливання різних видів. Залежно від виду деформації пружних елементів конструкцій розрізняють поздовжні, поперечні та крутильні коливання. При поздовжніх коливаннях переміщення всіх точок пружного стрижня спрямовані уздовж осі стрижня. При цьому спостерігаються деформації подовження або укорочення стрижня, тобто коливання розтягування-стиснення. Поперечними називають коливання вигину, при яких прогини спрямовані перпендикулярно осі стрижня. Напружений стан при поперечних коливаннях буде таким же, як і при статичному вигині балки. Тому поперечні коливання інакше можна назвати згинальними. Крутильними називають коливання стрижнів, супроводжувані змінною деформацією кручення.

На практиці часто відбуваються коливання змішаного типу, коли одночасно виникають деформації вигину і кручення. Це так звані згинально-крутильні коливання.

За фізичною сутністю коливання поділяють на вільні, вимушені, параметричні та самозбудні. В практиці експлуатації літаків важливо визначити види коливань, що виникають як у польоті, так і на землі. Залежно від виду коливань потрібно знайти шляхи їх запобігання, оскільки будь-які види коливань призводять до динамічного навантаження конструкції.

Власними (вільними) називають коливання, що виникають в ізольованій системі внаслідок зовнішнього збудження. Власні коливання продовжуються до тих пір, поки їх енергія не буде повністю витрачена на

роботу проти сил тертя об повітря й сили внутрішнього тертя в металі. При власних коливаннях характер коливального процесу в основному визначається внутрішніми силами. Період коливань (час одного повного коливання) або частота коливань (величина, зворотна періоду) залежать від розподілу мас та жорсткостей.

Вимушеними називаються коливання пружної системи, що відбуваються в результаті дії на систему заданих зовнішніх періодично змінних збурювальних сил. Характер коливального процесу залежить від властивостей системи та зовнішніх сил. Вимушені коливання не згасають. Коливальний процес відбувається з частотою збурювальної сили та підтримується внаслідок безперервного надходження енергії ззовні. При збігу частоти збурювальних сил з частотою власних коливань системи настає резонанс, який характеризується різким зростанням амплітуди вимушених коливань і супроводжується виникненням у конструкції неприпустимих деформацій. Коливання, які викликані неспокійною атмосферою, є вимушеними. У подальшому розглянемо дію на літак змінних зовнішніх сил, пов'язаних із турбулентністю атмосфери. Відмітемо, що така задача аеропружності є зв'язаною – аеродинамічні сили розраховуються з урахуванням динаміки руху ЛА та пружності конструкції.

1.3.1. Пружні моделі конструкції ЛА

Дослідження небезпечних явищ аеропружності нерозривно пов'язано з вивченням пружних властивостей конструкції та визначенням її динамічних характеристик – частот і форм власних коливань, які залежать від розподілу мас і жорсткостей по всьому ЛА. Розрахунок пружних характеристик ЛА можливий лише при заміні реальної конструкції її розрахунковою схемою, яка формується на основі ряду припущень і гіпотез щодо роботи конструкції. Обґрунтованість припущень, що вводяться, має обов'язково бути оцінена і перевірена. Необхідно порівняти теоретичні дані з експериментальними, отриманими в натурному або фізичному експерименті.

У звичайних умовах експлуатації літака матеріал конструкції, як правило, працює в пружній області. Тому як розрахункову схему конструкції виберемо лінійну пружну модель. Це означає, що виконується принцип суперпозиції при врахуванні дії сил на конструкцію. Дію кожної з сил може бути розглянуто окремо. Пружне переміщення деякої точки буде складатися з переміщень, викликаних кожною із сил. Черговість дії сил не має значення.

Елементи конструкції ЛА транспортної категорії – це тонкостінні підкріплені оболонки великого подовження (рис. 35), тому їх можна навести у вигляді балок, а модель пружного ЛА – як систему пов'язаних між собою балок [2, 4, 5].

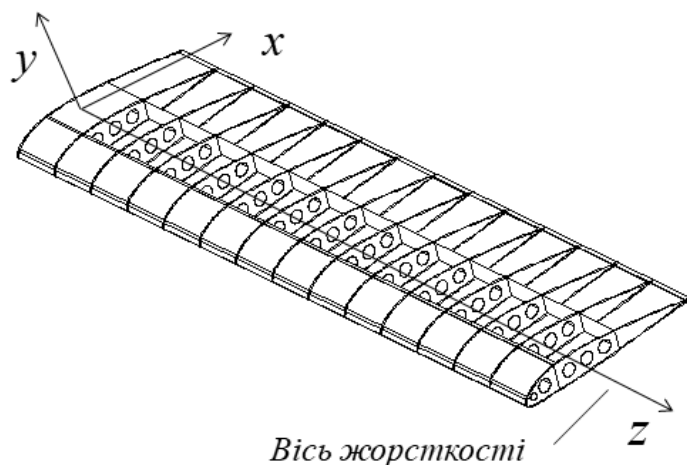


Рис. 35. Тонкостінна підкріплена оболонка великого подовження

Найбільш поширена динамічна схема для літаків і вертольотів з несучою поверхнею великого і помірного подовження ($\lambda > 3$) – балкова (рис. 36, а), де основні агрегати ЛА (крило, лопаті несучого гвинта, фюзеляж, оперення) замінюються еквівалентними балками, що мають розподілені по довжині маси і жорсткості. Зазвичай жорсткості на кручення GI_ρ і згинання EI задають у двох площинах – вертикальній і горизонтальній.

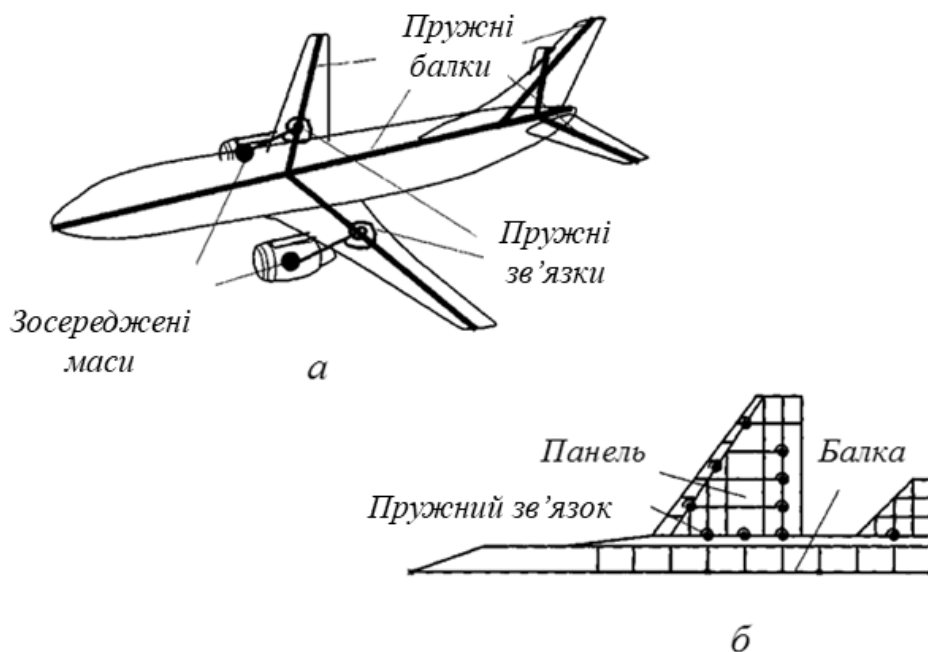


Рис. 36. Розрахункові схеми конструкції ЛА транспортної категорії:
а – балкова; б – пластинчасто-балкова.

Кожен агрегат ЛА наведений однією або декількома балками залежно від кількості зламів осі жорсткості. Стики балок можуть бути як абсолютно жорсткими, так і пружними, що характеризуються матрицями піддатливості. Балки мають розподілені інерційні властивості – погонні маси і моменти інерції. Вони можуть також нести зосереджені вантажі, такі, як двигуни, шасі, підвісні баки, контейнери. Вантажі зазвичай мають зміщення щодо осі балки і кріпляться до неї або жорстко, або пружно.

Крило на рис. 36,а замінено еквівалентною балкою, вісь якої розташована уздовж осі жорсткості реального крила. Пружні характеристики балки мають бути підібрані таким чином, щоб при одних і тих же зовнішніх навантаженнях величини деформації для крила і еквівалентної балки збігалися. На рис. 36, б показано комбіновану схематизацію ЛА – пластинчато-балкову. Крило має невелике подовження, тому застосовано пластинчасту його схематизацію, яка дозволяє враховувати деформацію крила вздовж нервюри.

За осьову лінію балки вибираємо геометричні місця центрів жорсткості поперечних перерізів. Надалі будемо вважати, що геометричні місця центрів жорсткості поперечних перерізів планера лежать на прямій лінії і утворюють так звану вісь жорсткості балки (рис. 37).

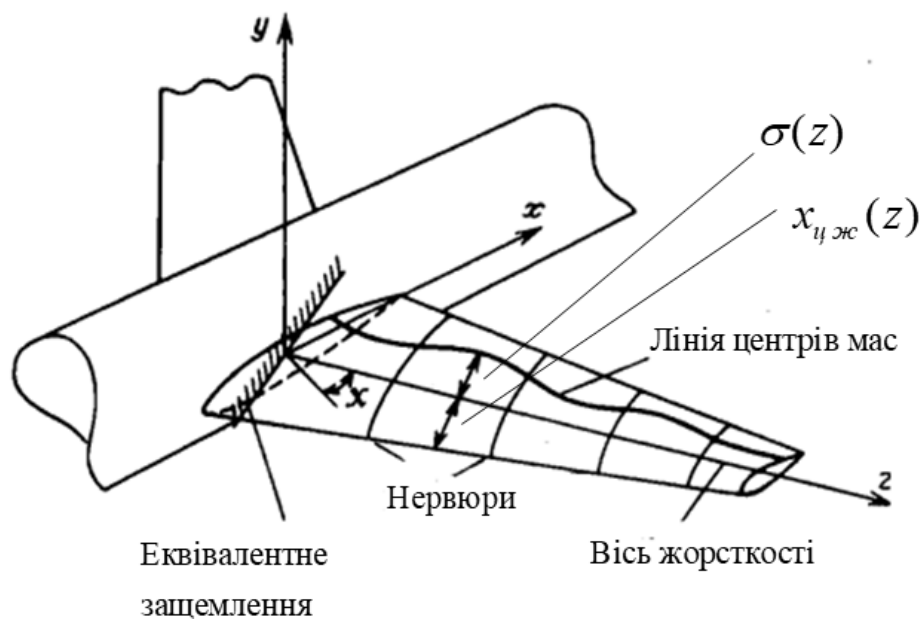


Рис. 37. Схематизація крила великого подовження у вигляді балки змінної жорсткості

Як видно з рисунка, центр жорсткості крила розташований від носика профілю на відстань $x_{цж}$. Лінія центрів мас перерізів для реальних крил

може мати досить складну форму. Її положення задається координатою центру мас відносно осі жорсткості – функцією $\sigma(z)$. Значення беруть додатними, якщо центр мас розташований за віссю жорсткості.

На рис. 38 показані розрахункові схеми маневреного літака. Це може бути балкова схематизація (рис. 38, а), пластинчато-балкова (рис. 38, б) або подання ЛА великою кількістю кінцевих елементів (рис. 38, в).

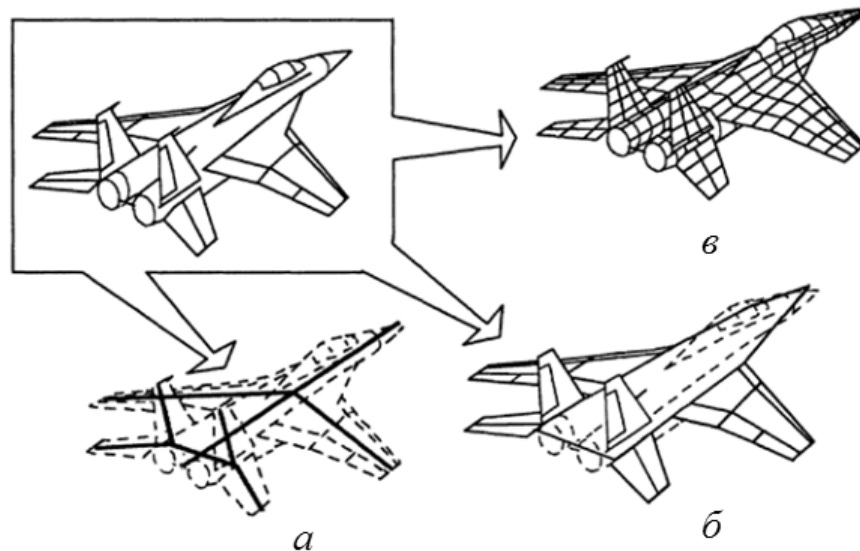


Рис. 38. Розрахункові схеми конструкції маневреного ЛА

Вважаємо далі, що жорсткість крила в плані досить велика, тому деформацією крила в площині нехтуємо. Відзначимо, що для крил великого подовження можна знехтувати і деформацією його поперечних перерізів. Це пояснюється тим, що несучі поверхні підкріплюються часто розташованими нервюрами, жорсткість яких в своїй площині досить велика. Таким чином, будь-який переріз переміщується як жорстке ціле (рис. 39).

Тому достатньо в перерізі z задати його вертикальне переміщення $y(z)$ і кут повороту $\vartheta(z)$. Переміщення осі жорсткості обумовлене деформаціями згинання і кручення балки.

Підкреслимо, що деформація перерізу відбувається відносно системи координат $Oxyz$, умовно нерухомої. Початок координат (точка O) внаслідок деформації фюзеляжу має певне лінійне переміщення \vec{r}_O , крім того, система координат $Oxyz$ повертається на деякий кут $\vec{\psi}_O$.

Осі координат x і y спрямовані уздовж головних центральних осей перерізу, а вісь z збігається з поздовжньою віссю балки, що проходить через вісь жорсткості. Пружними переміщеннями уздовж осі x зазвичай

нехтують. Кут повороту перерізу позитивний при обертанні перерізу проти годинникової стрілки, якщо дивитися з позитивного напрямку осі z .

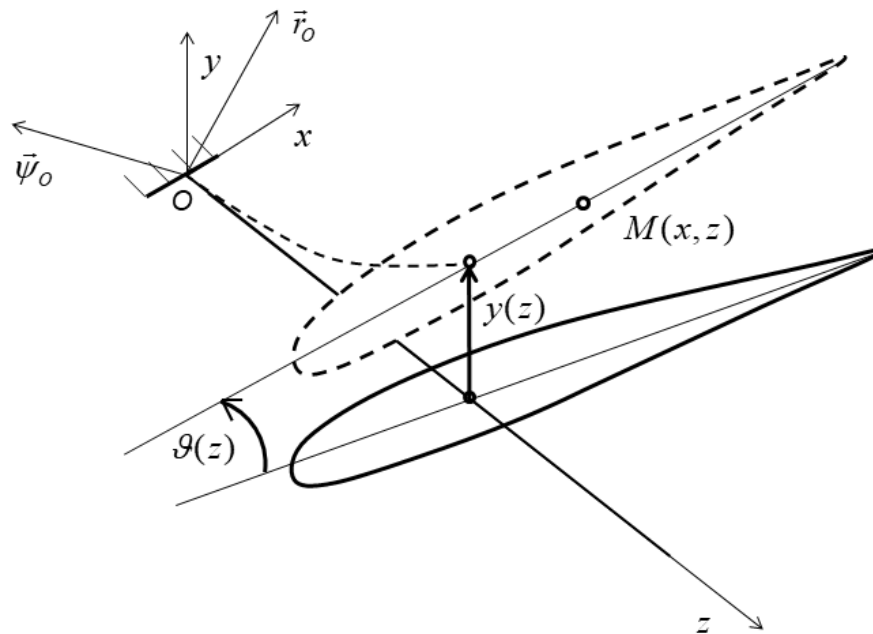


Рис. 39. Переміщення перерізу крила як жорсткого тіла

Очевидно, що вертикальне переміщення $y(x, z)$ довільної точки $M(x, z)$ крила з лінійною точністю

$$y(x, z) = y(z) + \vartheta(z)x. \quad (41)$$

Лінійні $y(z, t)$ і кутові $\vartheta(z, t)$ переміщення розкладаються за формами власних згинальних $f_i(z)$ і крутильних $\varphi_j(z)$ коливань ($i = 1, \dots, N_1$; $j = 1, \dots, N_2$). Визначення функцій $f_i(z)$ і $\varphi_j(z)$ буде наведено нижче.

Згідно з методом заданих форм, переміщення перерізу несучої поверхні описують у вигляді добутку форм на узагальнені координати $q(t)$, що залежать тільки від часу:

$$y(z, t) = \sum_{i=1}^{N_1} f_i(z)q_i(t); \quad \vartheta(z, t) = \sum_{j=1}^{N_2} \varphi_j(z)q_j(t), \quad (42)$$

де N_1 і N_2 – число тонів власних згинальних і крутильних коливань, що утримуються. У загальному випадку в число N_1 і N_2 входять тони коливань ЛА як твердого тіла.

Число степенів вільності пружної конструкції взагалі дорівнює нескінченності. Після розкладання переміщень точок конструкції за формами власних згинальних і крутильних коливань число степенів вільності конструкції стає обмеженим:

$$N = N_1 + N_2,$$

тобто невідомими є N узагальнених координат $q(t)$.

Метод заданих форм суттєво знижує трудомісткість обчислень і забезпечує достатньо високу точність розрахунків. Але виникає жорстка вимога щодо точного задання форм і частот власних коливань. Для цього широко використовують розрахункові та експериментальні методи визначення частот і форм.

Для апаратів із крилом малого і помірного подовжень застосовують пластинчато-балкову схематизацію. Крило і оперення наводять у вигляді набору панелей, пластин і балок. Фюзеляж, як правило, зображують однією або декількома балками (див. рис. 36, б і 38, б), а стики окремих агрегатів між собою схематизують розподіленими або зосередженими пружинами. Така схема дозволяє врахувати деформацію агрегатів (крила, оперення) по потоку і тим самим більш точно обчислити аеродинамічне навантаження.

Для пластинчато-балкової схематизації як вихідну систему функцій, що описують деформацію агрегату (пружної поверхні), використовують поліноми, тому метод схематизації деформацій називають методом поліномів:

$$y(x, z, t) = \sum_{i=1}^N f_i(x, z) q_i(t), \quad (43)$$

де $f_i(x, z) = x^{p_i} z^{r_i}$ – поліноми за аргументами x, y ;

p_i, r_i – показники ступенів, які вибирають з натурального ряду чисел згідно з особливостями завдання і можливостей комп'ютера;

$q_i(t)$ – узагальнені координати;

N – апіорне число поліномов, що задається.

Послідовний розвиток методу скінченних елементів (МКЕ) дозволяє широко застосовувати його в задачах аеропружності для розрахунку динамічних навантажень. Відповідно до цього методу конструкцію літака або вертольота наводять у вигляді великого числа простих елементів (число типів елементів вимірюють десятками, а весь ЛА – десятками, а часто сотнями тисяч елементів). При цьому досягають високої точності відтворення конструкції, проте потрібним є завдання великих обсягів вихідних даних і робота з громіздкими масивами чисел.

Принциповою складністю застосування МКЕ є вирішення проблеми власних значень для матриць великих порядків. Виходом із такої ситуації є застосування комбінованих схем (рис. 40).

Комбіновані схеми характеризуються тим, що на скінченні елементи розбивають тільки достатньо складні, нерегулярні частини конструкції: центральний відсік фюзеляжу, кореневий трикутник крила, пілони двигунів і т. ін.

При дослідженні динамічної реакції літака, як показує практика, широко застосовують спрощені розрахункові схеми пружної конструкції. В процесі проектування літака може бути відсутня інформація щодо масових і жорсткісних характеристик усього ЛА і тоді для оперативної оцінки навантаження конструкції розглядають прості її схеми, наприклад, зацмлену до фюзеляжу консоль крила. Розрахунок форм і частот консолі крила, як буде показано далі, може бути здійснено достатньо точно.

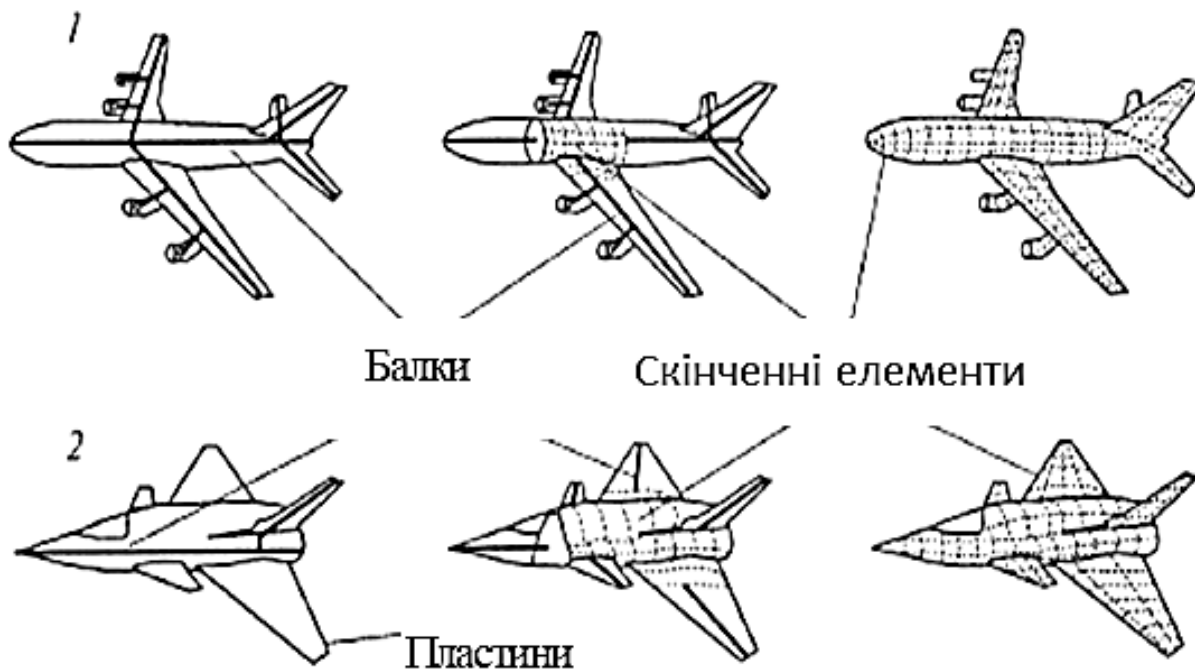


Рис. 40 . Розрахункові моделі ЛА на основі комбінованого підходу

На рис. 41 показано розрахункову схему зацмленої до жорсткого фюзеляжу консолі крила (на рисунку зображена ліва консоль крила). Зв'язана система координат $Oxuz$ проходить через центр мас ЛА.

При поздовжньому короткоперіодичному русі літака від дії пориву спостерігається вертикальне прискорення центру мас літака $\vec{a}_{ЛА}$ і кутове

прискорення $\vec{\varepsilon}_{ЛА}$. Збурений рух ЛА характеризується вертикальною $\vec{V}_{ЛА}$ і кутовою $\vec{\omega}_{ЛА}$ швидкістю. В конструкції виникають пружні коливання.

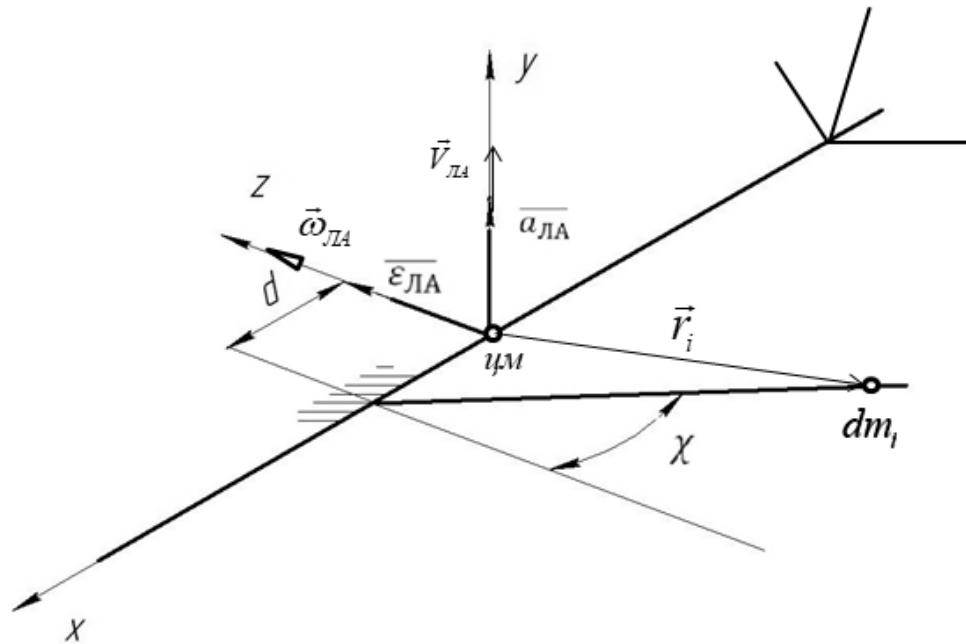


Рис. 41. Консоль крила, що защемлена до жорсткого фюзеляжу

Деформацію консолей крила моделюємо на основі методу заданих форм. Як останні беруть форми вільних ізольованих згинальних і крутильних коливань защемленої консолі крила або сумісних згинально-крутильних коливань.

Аеродинамічне навантаження визначають на основі гіпотези квазістаціонарності з урахуванням місцевих кутів атаки крила, що викликані як поздовжнім збуреним рухом ЛА як твердого тіла, так і деформацією конструкції. Швидкість елемента балки в перерізі, де визначають аеродинамічне навантаження, обчислюють як векторну суму швидкості центру мас $\vec{V}_{ЛА}$, лінійної швидкості елемента $\vec{\omega}_{ЛА} \times \vec{r}_i$ від обертання ЛА і швидкості деформації $\vec{V}_{деф i}$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{ЛА} + \vec{\omega}_{ЛА} \times \vec{r}_i + \vec{V}_{деф i}, \quad (44)$$

де \vec{r}_i – радіус-вектор елемента балки;

$\vec{V}_{деф i}$ – швидкість деформації, яка згідно з (42) дорівнює

$$V_{деф i}(z, t) = \sum_{i=1}^N f_i(x, z) \dot{q}_i(t), \quad (45)$$

де $\dot{q}_i(t)$ – швидкість зміни узагальненої координати $q_i(t)$.

При визначенні навантажень на крило враховують розподілене поверхневе аеродинамічне навантаження Δp і масове навантаження від переносних сил інерції мас консолі. Елементарна сила інерції, що діє на балку (вісь жорсткості) в точці, радіус-вектор якої \vec{r}_i , дорівнює

$$d\vec{F}_{ini} = -dm\vec{a}_i,$$

де dm – елемент маси;

\vec{a}_i – переносне прискорення точки балки, яке пов'язано з неінерціальністю системи координат $Oxyz$, з лінійною точністю обчислюється так:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{ЛА} + \vec{\varepsilon}_{ЛА} \times \vec{r}_i.$$

Для защемленої до фюзеляжу консолі крила можна застосувати різні спрощені ММ :

- знехтувати впливом збуреного руху ЛА на розподіл по крилу аеродинамічного навантаження Δp і масового навантаження від переносних сил інерції;
- враховувати дію на крило тільки набігаючого потоку і вертикального пориву;
- розглядати форми та частоти защемленого до нерухомого фюзеляжу крила;
- вважати, що пружні коливання консолі не впливають на рух ЛА як твердого тіла;
- коливання консолі розраховувати з урахуванням не тільки нестационарного аеродинамічного навантаження крила, але і збуреного руху ЛА;
- нехтувати пружністю фюзеляжу.

Порівнюючи з експериментом результати розрахунку динамічної реакції ЛА на основі використання ММ різного рівня, можна зробити висновки щодо доцільності їх використання.

Найбільш точні результати дає використання повної ММ ЛА. Як правило, збуреним рухом всього ЛА нехтувати не можна, оскільки швидкість центру мас і частота обертання навколо нього дають досить значний внесок в аеродинамічне навантаження крила. Додатково необхідно дослідити вплив неінерціальності системи координат $Oxyz$

унаслідок короткоперіодичного руху ЛА на навантаження і пружні коливання консолі.

Пружні переміщення консолі крила залежать від величини внутрішніх силових факторів (ВСФ), що діють у перерізах крила. У загальному випадку в довільному перерізі z діють шість силових чинників – $Q_x, Q_y, N, M_x, M_y, M_z$. Це проекції головного вектора і головного моменту внутрішніх сил. Внутрішні сили є результатом дії розподілених і зосереджених поверхневих і масових сил, а також реакцій у місцях закріплення. Основний вплив на навантаження і деформацію крила мають два силових фактори – згинальний момент у площині найменшої жорсткості крила (в площині yz) і крутильний момент щодо осі жорсткості (осі z).

Деформація консолі крила

Деформація балки достатньо точно описується диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{M_{3z}(z)}{EI(z)}; \\ \frac{d\varphi}{dz} &= \theta = \frac{M_{кр}(z)}{GI_{кр}(z)}, \end{aligned} \quad (46)$$

де $\frac{1}{\rho}$ – кривизна осі жорсткості крила в площині yz ;

$\frac{d\varphi}{dz}$ – відносний кут закручування крила навколо осі жорсткості;

$M_{3z}(z), M_{кр}(z)$ – згинальний і крутильний моменти, що діють у перерізі z ;

$EI(z), GI_{кр}(z)$ – згинальна і крутильна жорсткості крила.

Скористаємося наближеним співвідношенням

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dz^2}.$$

Згин крила характеризується поворотом секцій відносно осі x і їх переміщенням вздовж осі y , кручення – поворотом перерізів відносно осі z .

Нахил осі жорсткості в перерізі крила

$$\frac{dy}{dz} = \int_0^z \frac{M_{3z}(z)}{EI(z)} dz + C_1,$$

а переміщення

$$y = \int_0^z dz \left(\int_0^z \frac{M_{3z}(z)}{EI(z)} dz \right) + C_1 z + C_2.$$

Постійні інтегрування визначимо з граничних умов. При $z = 0$

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dz} = 0,$$

тому $C_1 = 0$; $C_2 = 0$. Пружне переміщення перерізу крила

$$y(z) = \int_0^z d\xi \left(\int_0^z \frac{M_{3z}(\xi)}{EI(\xi)} d\xi \right). \quad (47)$$

Інтегруючи вдовж координати ξ , знайдемо кут закручування крила в перерізі

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{M_{кр}(\xi) d\xi}{GI_{кр}(\xi)} + C_3.$$

При $z=0$ відсутній поворот, тому $C_3 = 0$. У результаті одержимо кут повороту перерізу крила:

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{M_{кр}(\xi) d\xi}{GI_{кр}(\xi)}. \quad (48)$$

Оскільки $M_{3z}, M_{кр}, EI, GI_{кр}$ – складні функції від z , то інтегрування можна проводити числовими методами.

Відзначимо, що пружне переміщення $y(z)$ перерізу прямого крила практично не змінює місцеві кути атаки, в той же час кут закручування перерізу крила їх змінює. Додатковий місцевий кут атаки для прямого крила пружної конструкції становить

$$\Delta \alpha_{np} = \varphi(z).$$

1.3.2. Розподіл масових та інерційних характеристик за розмахом консолі крила

Вивчення аеропружних характеристик ЛА потребує використання великих обсягів інформації щодо геометричних, масових, інерційних і жорсткісних властивостей конструкції. Оскільки ці дані виникають на етапі робочого проектування літака, то при формування ММ аеропружності зробимо ряд припущень щодо масових та інерційних характеристик вздовж розмаху крила:

– розглядаємо спрямлене крило. При невеликих кутах стрілоподібності можна розглядати вихідне крило (рис. 42);

– вважаємо, що крило призматичне вздовж розмаху і трапецієподібне на вигляді в плані. Розподіл хорд – лінійний по довжині

$$b(\bar{z}) = b_0 - (b_0 - b_k) \cdot \bar{z}, \quad (49)$$

де $\bar{z} = z/l$ – відносна координата;

l – розмах консолі;

b_0, b_k – коренева та кінцева хорди крила;

Усі лінійні розміри в перерізі \bar{z} змінюються за законом зміни хорди $b(\bar{z})$;

– масу консолі крила розраховувать за статистичними формулами;

– консоль крила має носову, кесонну і хвостову частини. В результаті проектувального розрахунку крила (для одного з розрахункових випадків навантаження – A або A') отримано площу силових елементів у розрахунковому перерізі крила, наприклад, при $\bar{z} = 0,1$;

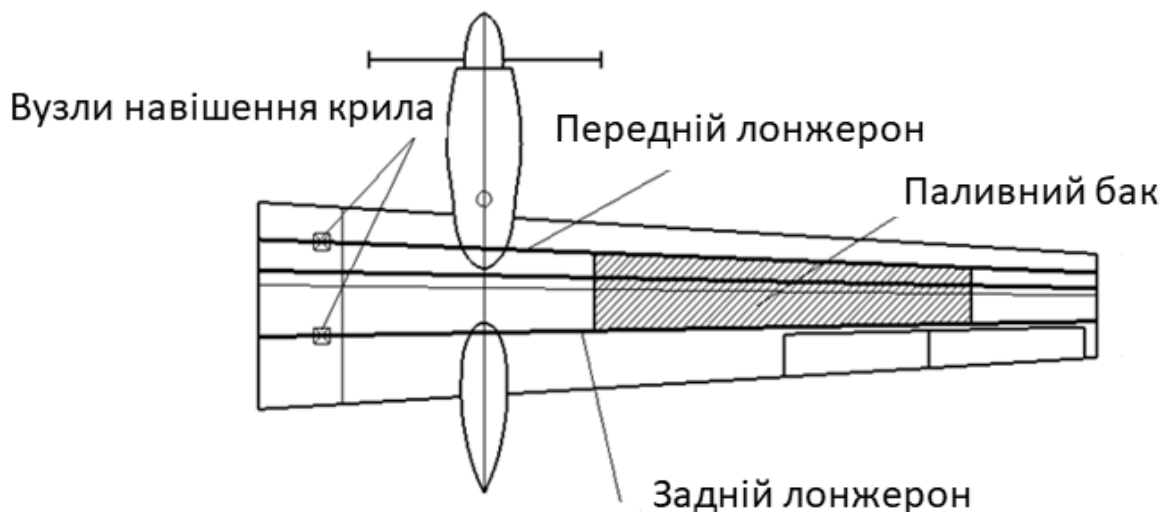


Рис. 42. Вигляд у плані на крило

– площу силових елементів (та їх масу) розподіляють по розмаху згідно з вимогою рівномірності перерізів щодо дії згинального моменту $M_{3z}(\bar{z})$. Площа в перерізі \bar{z}

$$S_{ел}(\bar{z}) = \frac{M_{3z}(\bar{z})b(\bar{z} = 0,1)S_{ел}(\bar{z} = 0,1)}{M_{3z}(\bar{z} = 0,1)b(\bar{z})}. \quad (50)$$

Силкові елементи в перерізі крила зображені на рис. 43;

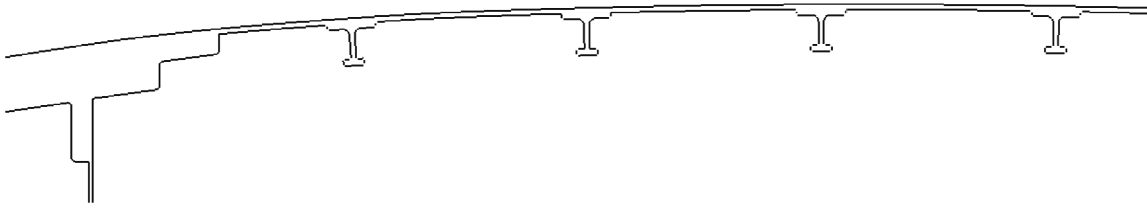


Рис. 43 . Силкові елементи крила в перерізі $\bar{z} = 0,1$

- в носовій і хвостовій частинах розміщується механізація крила;
- крило має два лонжерони, міжлонжеронна частина крила сприймає усі навантаження і є основним силовим елементом перерізу;
- розподіл палива по розмаху консолі пропорційний квадрату хорди;
- Якщо паливний бак розташований починаючи з перерізу $\bar{z} = 0,4$ (див рис. 42), то погонна маса палива

$$m_{\text{пал}}(z) = \frac{F_{\text{пер } 0,4} \cdot b(z)^2}{b_{\text{пер},0,4}^2} \cdot \rho_{\text{пал}}, \quad (51)$$

де $F_{\text{пер } 0,4}$, $b_{\text{пер},0,4}$ – площа палива і хорда в перерізі крила $\bar{z} = 0,4$;

$\rho_{\text{пал}}$ – густина гасу;

- погонна маса консолі крила

$$m_{\text{констр}}(z) = m_{\text{нос.ч}}(z) + m_{\text{кес.ч}}(z) + m_{\text{хв.ч}}(z);$$

- напруження в силових елементах крила при пружних коливаннях менше межі пропорційності матеріалу;

- розглядаємо редуковане крило (рис. 44).

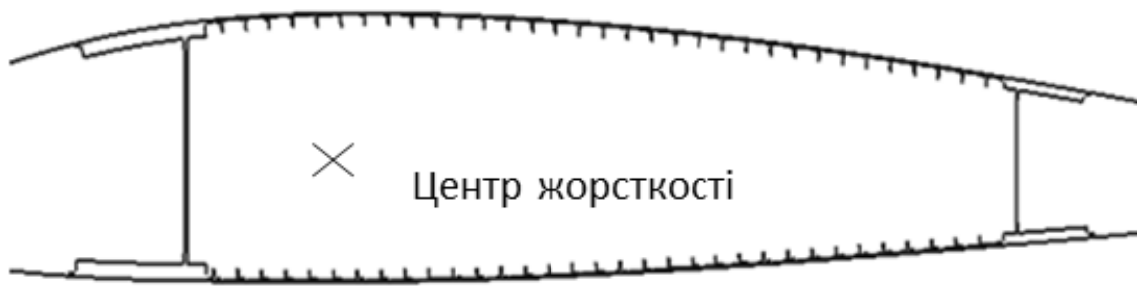


Рис. 44. Редукований переріз крила

Коефіцієнт редукації для елемента крила приймають як відношення модулів пружності

$$\varphi_i = \frac{E_i}{E_\phi},$$

де E_i, E_ϕ – модулі пружності i -го елемента і редукованого матеріалу;

– група паливних баків, що розміщена в консолі, повністю заповнена паливом (це дозволяє при розрахунку коливань крила не враховувати динаміку переміщень палива в баках, що заповнені частково);

– полярні моменти інерції частин перерізів консолі розподіляють пропорційно величині текучої хорди в четвертому степені.

1.3.3. Оцінювання згинальної та крутильної жорсткості крила на основі метода Релея-Рітца

Визначимо жорсткісні характеристики консолі крила – згинальну $EI(z)$ і крутильну $GI_{кр}(z)$ жорсткості. Застосовують балкову схематизацію пружних властивостей конструкції крила.

Згинальна і крутильна жорсткості можуть бути знайдені на основі даних проектувального розрахунку перерізу крила для одного з розрахункових випадків навантаження ЛА, наприклад A або A' . Для цих випадків ЛА піддається максимальному експлуатаційному перевантаженню.

Жорсткості крила в процесі проектування літака уточнюють на основі аналізу всіх регламентованих розрахункових випадків навантаження ЛА. Наприклад, при вивченні таких небезпечних явищ, як дивергенція крила або флатер, потрібні значення $EI(z)$ і $GI_{кр}(z)$ доводиться збільшувати.

Оцінимо згинальну і крутильну жорсткості крила на основі методу Релея – Рітца, ґрунтуючись на статистичних даних щодо частот згинальних і крутильних коливань крила літака-прототипу. Ці характеристики на практиці визначають не тільки розрахунком, але і в експерименті, при частотних випробуваннях ЛА.

Визначення згинальної жорсткості крила

Консоль крила являє собою систему з нескінченним числом степенів вільності, яку наближено можна привести до системи з одним ступенем вільності, якщо априорі відома конфігурація системи при коливаннях, так звана форма коливань [9]. Задаючи певну форму коливань системі з розподіленою масою і жорсткістю, ми зводимо її до одного ступеня вільності. Власну частоту коливань такої схематизованої системи знаходять за допомогою енергетичного методу, званого методом Релея.

Релей довів теорему, згідно з якою власна частота коливань (при априорних припущеннях про форму коливань) у результаті розрахунків завжди дорівнює власній частоті коливань, отриманій на основі точних

співвідношень, або більше неї. Дійсно, вибір форми пружної лінії коливань стрижнів рівносильний введенню в систему додаткових обмежень (зв'язків), що приводять складну систему до системи, що має тільки один степінь вільності. Додаткові обмеження (зв'язки) можуть тільки збільшити жорсткість системи. Тому частота власних коливань завжди буде більше порівняно з точним значенням.

Згідно з методом Релея задається конфігурація коливальної пружної системи під час її вільних коливань. Частоту коливань визначають із балансу енергії системи.

Розглянемо вільні згинальні коливання консолі крила погонної маси $m_n(z)$ (рис. 45), закріпленої до фюзеляжу (умовно нерухомого). Уявімо її у вигляді балки зі змінною згинальною жорсткістю $EI(z)$ уздовж розмаху. Прогин балки в процесі коливань змінюється за деяким законом $y(z, t)$. Згідно із методом Релея функція, що визначає форму балки в довільний момент часу, має вигляд

$$y(z, t) = q(t)f(z), \quad (52)$$

де $f(z)$ – функція, що заздалегідь призначається; $q(t)$ – деяка, поки невідома функція часу. Після апіорного задання $f(z)$ функція $q(t)$ однозначно задає конфігурацію системи, тому $q(t)$ часто називають узагальненою координатою.

Практично замість того, щоб задавати форму коливань, можна прикласти до балки деяке статичне навантаження і визначити за ним форму пружної лінії, яку і прийняти за форму коливань (рис. 45). Цей спосіб зручний тим, що граничні умови виконуються автоматично, хоч би яким було вибрано навантаження.

Задамо навантаження у вигляді будь-яких сил P_1, P_2, \dots, P_n , тоді потенціальну енергію згинання можна виразити через роботу цих сил:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i y_i,$$

де y_i – прогини, що викликаються прийнятою системою навантажень. За сили P_i доцільно прийняти фактичне навантаження конструкції розподіленими силами тяжіння $P_i = m_i g$.

Отже, форму осі балки $f(z)$ слід вибирати з урахуванням заданого способу закріплення балки, тобто граничних умов.

При жорстко закріпленому кінці балки неможливі прогин і поворот у місці защемлення, тобто при $z = 0$

$$y(0,t) = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial y(0,t)}{\partial z} = 0$$

у будь-який момент часу. Тоді, очевидно, на функцію форми накладають такі обмеження:

$$f(0) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} = 0.$$

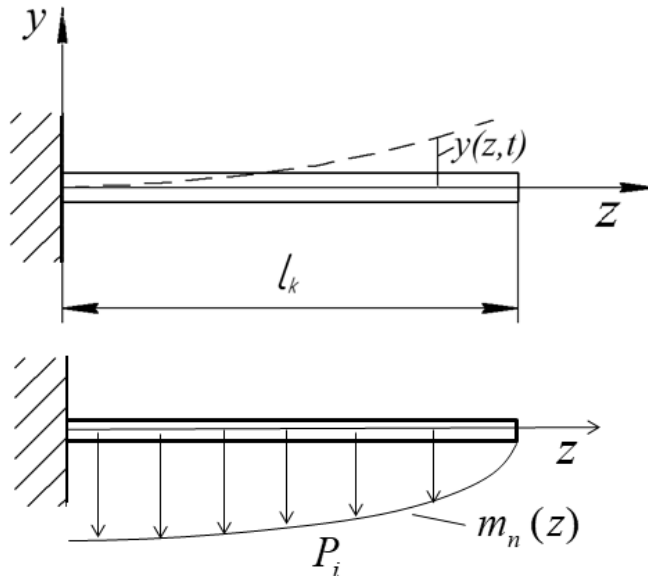


Рис. 45. Вільні згинальні коливання консолі крила

Ці умови кінематичні, тому що відносяться до переміщень і форми балки. На вільному кінці балки поперечна сила $Q_y(l_k)$ і згинальний момент $M_{зг}(l_k)$ у будь-який момент часу t дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{\partial^2 y(l_k, t)}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 y(l_k, t)}{\partial z^3} = 0. \quad (53)$$

Ці граничні умови, які є силовими, з урахуванням (53) набувають вигляду

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z=l_k} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\right)_{z=l_k} = 0.$$

Переміщення точок, що лежать на осі балки, що збігається з віссю жорсткості, в процесі вільних поперечних коливань описуються законом

$$y(z, t) = f(z) \sin(\omega t + \varepsilon),$$

де ω – частота коливань; ε – початкова фаза. Тобто всі точки балки одночасно досягають найбільших відхилень і положень рівноваги. Швидкості точок осі балки

$$\frac{dy}{dt} = \omega f(z) \cos(\omega t + \varepsilon),$$

а максимальні швидкості в положенні рівноваги

$$v_{max}(z) = \omega f(z).$$

Найбільші відхилення

$$y_{max}(z) = f(z).$$

Максимальна потенціальна енергія деформації в положенні найбільшого відхилення

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} EI(z)(y''_{max}(z))^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} EI(z)(f(z)'')^2 dz,$$

а максимальна кінетична енергія

$$T_{max} = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} m_{\Pi}(z)v_{max}(z)^2 dz = \frac{p^2}{2} \int_0^{l_k} m_{\Pi}(z)f(z)^2 dz,$$

де $m_{\Pi}(z)$ – погонна маса консолі.

Згідно із законом про збереження повної механічної енергії

$$T_{max} = U_{max},$$

звідки маємо формулу Релея

$$\omega^2 = \frac{\int_0^{l_k} EI(z)(f(z)'')^2 dz}{\int_0^{l_k} m_{\Pi}(z)f(z)^2 dz}. \quad (54)$$

Відзначимо, що частоти власних згинальних коливань крила за першим тоном для маневрених літаків становлять 6,5...8,5 Гц, а для неманеврених – 1,5 ... 5,0 Гц.

Якщо форму балки $f(z)$ задати точно, то частота власних коливань буде визначена вірно. Наближене значення частоти, як зазначалося вище, завжди більше істинного.

Визначимо на основі методу Релея розподіл згинальної жорсткості консолі крила $EI(z)$, якщо відома нижча згинальна частота коливань крила. Нехай зі статистики відома перша частота власних коливань крила ω_{c1} . Як форму коливань приймемо функцію

$$f(z) = \frac{z^2}{2l_{\kappa}} - \frac{z^3}{3l_{\kappa}^2} + \frac{z^4}{12l_{\kappa}^3},$$

яка задовольняє всі граничні умови задачі:

$$f(0) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z=l_{\kappa}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\right)_{z=l_{\kappa}} = 0.$$

Знаючи погонну масу консолі $m_{\Pi}(z)$, що складається з маси конструкції крила і палива, а також масу вантажів m_i , маємо

$$\omega_c^2 = \frac{\int_0^{l_k} EI(z)(f(z)')^2 dz}{\int_0^{l_k} m_{\Pi}(z)f(z)^2 dz + \sum_{i=1}^N m_i f_i^2}, \quad (55)$$

де $f_i = f(z_i)$; z_i – координата вантажу; N – кількість вантажів.

Зі співвідношення (55) можна визначити функцію $EI(z)$, якщо відома частота власних коливань ω_c . Наприклад, якщо згинальна жорсткість змінюється за лінійним законом

$$EI(z) = EI(0)(1 - \bar{z}),$$

де $\bar{z} = \frac{z}{l_k}$, то з виразу (55) можна знайти значення згинальної жорсткості $EI(0)$ крила в місці прикріплення до фюзеляжу.

При виконанні курсового проекту «Розрахунок на міцність крила великого подовження» необхідно визначити згинальну жорсткість крила в розрахунковому перерізі крила для одного з випадків його навантаження. Бажано зіставити значення згинальної жорсткості крила, отримані на основі двох підходів.

Метод Рітца

За допомогою способу Релея можна знайти завищену першу частоту. Більш точні значення основної частоти, а також частоти вищих тонів коливань отримують за допомогою методу Рітца. У методі Рітца в рівняння пружної лінії при коливаннях вводять кілька параметрів. Їх величини підбирають так, щоб частота основного тону коливань була мінімальною.

Наприклад, поперечні коливання балки наведемо у вигляді

$$y(z) = a_1 y_1(z) + a_2 y_2(z) + \dots, \quad (56)$$

причому функція $y_i(z)$ задовольняє граничні умови. Підставляючи вираз (56) в формулу Релея (55), бачимо, що результат залежить від коефіцієнтів a_1, a_2 і т. ін. (точніше – від a_i/a_j). Коефіцієнти підбирають з умови, щоб формула (55) мала найменше значення частоти. Для цього всі часткові похідні мають дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{\int_0^{l_k} EI(z)(f(z)')^2 dz}{\int_0^{l_k} m_{\Pi}(z)f(z)^2 dz} \right] = 0.$$

Після перетворень

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^{l_k} \left[EI \left(\frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 - \omega^2 m y^2 \right] dz = 0.$$

Очевидно, що таких рівнянь стільки, скільки членів у ряду (56). Ці рівняння однорідні і лінійні щодо коефіцієнтів $a_1, a_2 \dots$. Прирівнюючи визначник зазначеної системи рівнянь нулю, отримуємо частотне рівняння.

Метод Рітца дозволяє знайти не тільки нижчу частоту, але і значення вищих частот, хоча і з меншою точністю. При цьому можна визначити стільки частот, скільки доданків прийнято у виразі (56).

Визначення крутильної жорсткості крила

По аналогії із згинальними коливаннями знаходять співвідношення для оцінювання крутильної жорсткості.

Потенціальну енергію пружних сил при крученні крила визначають так:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} GI_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dz,$$

де I_p – полярний момент інерції перерізу;

$\varphi(z)$ – функція форми для закрученого крила.

Отже, треба зробити припущення щодо форми $\varphi(z)$ крутильних коливань балки.

Кінетична енергія балки

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} I_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dz,$$

де I_m – масовий момент інерції перерізу.

Згідно із законом про збереження повної механічної енергії частота крутильних коливань

$$\omega_c^2 = \frac{\int_0^{l_k} GI_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dz}{\int_0^{l_k} I_m (\varphi)^2 dz}. \quad (57)$$

При точному значенні функції форми $\varphi(z)$ цей вираз визначає точне значення частоти власних крутильних коливань. Якщо задати функцію так, щоб вона задовольняла граничні умови задачі

$$\varphi(0) = 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=l_k} = 0,$$

то значення частоти доволі близьке до точного значення.

Визначимо крутильну жорсткість однозамкнутого контуру крила за відомими силовими елементами в перерізі.

У результаті розрахунку на міцність крила відомі аеродинамічний профіль крила, конструктивно-силова схема (лонжеронна або моноблокова), розміри силових елементів, положення лонжеронів, стрингерів і конструкційні матеріали. Як правило, розглядається однозамкнений контур, утворений переднім лонжероном, верхньою обшивкою, заднім лонжероном і нижньою обшивкою.

Крутильну жорсткість однозамкненого контуру крила в розрахунковому перерізі знаходять зі співвідношення [3]

$$GI_{кр} = \frac{4F^2}{\sum \frac{l_i}{G\delta_i}}, \quad (58)$$

де F – площа, обмежена контуром перерізу;

l_i – довжина ділянки контуру, для якого не змінюється товщина обшивки;

δ_i – товщина i -ї ділянки обшивки;

G – модуль зсуву.

Підсумовування поширюється на всі ділянки контуру.

Відмітимо, що на практиці частоти власних крутильних коливань крила за першим тоном для маневрених літаків становлять 30 ... 42 Гц, а для неманеврених – 2,5 ... 5,0 Гц.

Закон розподілу згинальної і крутильної жорсткостей в довільному перерізі крила задаємо на підставі статистичних даних.

Визначення центру жорсткості крила

Вважаємо, що конструктивно-силова схема крила характеризується однозамкненим контуром, що утворений переднім і заднім лонжеронами. Положення центра жорсткості визначається методами будівельної механіки.

Розглянемо контур пресованого лонжерона (рис. 46). Лонжерон є тонкостінною конструкцією, яка забезпечує поєднання високої міцності й жорсткості при відносно невеликій масі. Він являє собою подовжену

оболонку циліндричної форми із заданим контуром поперечного перерізу.

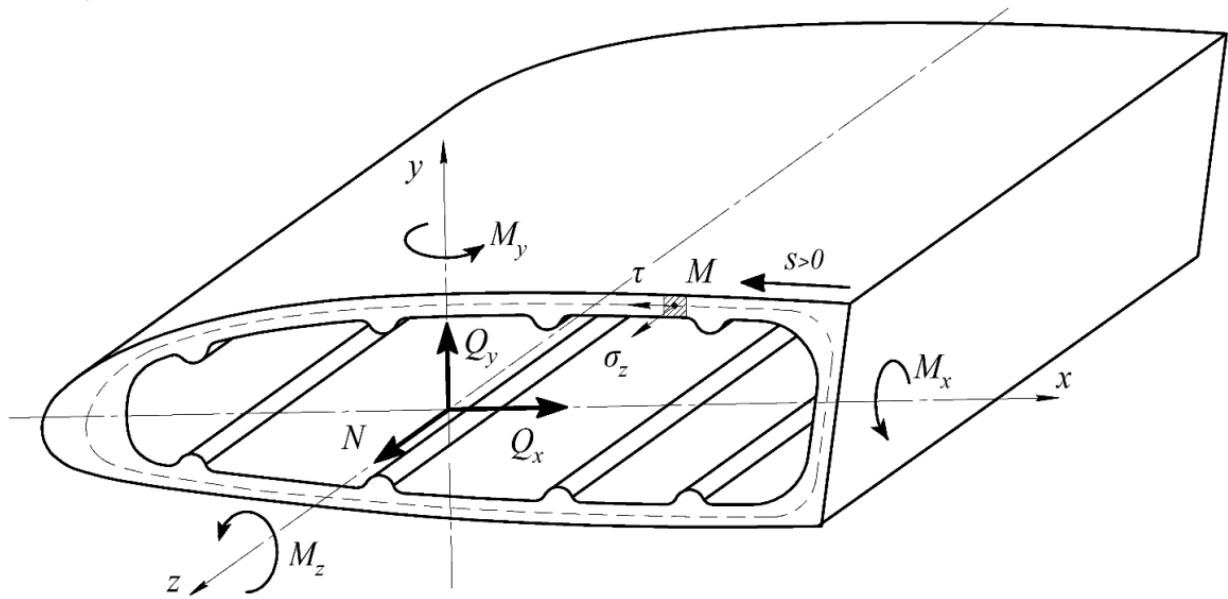


Рис. 46. Поперечний переріз пресованого лонжерона

Введемо серединну поверхню, що ділить товщину оболонки навпіл. Крива, яка утворюється при перетині серединної поверхні площиною, перпендикулярною до поздовжньої осі оболонки, називається контуром поперечного перерізу. Положення будь-якої точки M оболонки характеризується криволінійною координатою s , відлічуваною від деякої початкової, і поздовжньою координатою z .

Координати центру жорсткості (ЦЖ) однозамкненого контуру визначають таким чином [3]:

$$x_{ЦЖ} = x_{ЦЗ} + \frac{\Omega_k \oint \frac{S_x ds}{\delta}}{I_x \oint \frac{ds}{\delta}} = -\frac{\oint S_x \rho ds}{I_x} + \frac{\Omega_k \oint \frac{S_x ds}{\delta}}{I_x \oint \frac{ds}{\delta}};$$

$$y_{ЦЖ} = y_{ЦЗ} - \frac{\Omega_k \oint \frac{S_y ds}{\delta}}{I_y \oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{\oint S_y \rho ds}{I_y} - \frac{\Omega_k \oint \frac{S_y ds}{\delta}}{I_y \oint \frac{ds}{\delta}},$$

де $x_{ЦЗ}, y_{ЦЗ}$ – координати центру згинання відкритого контуру:

$$x_{ЦЗ} = -\frac{\oint S_x \rho ds}{I_x}, \quad y_{ЦЗ} = \frac{\oint S_y \rho ds}{I_y};$$

S_x, S_y – статичні моменти перерізу відносно головних центральних осей x і y :

$$S_x = \int_0^s \varphi y \delta ds + \sum_{j=1}^m \varphi_j y_j f_j, S_y = \int_0^s \varphi x \delta ds + \sum_{j=1}^m \varphi_j x_j;$$

δ і φ – товщина і редуційний коефіцієнт обшивки;

x_j, y_j, f_j – координати і площа перерізу j -го поздовжнього елемента;

ρ – плече елементарної сили $q_Q ds$ відносно вибраного центра;

I_x, I_y – моменти інерції перерізу;

$\Omega_K = \oint \rho ds$ – подвоєна площа поперечного перерізу контуру.

Статичні моменти перерізу залежать від координати s , що відрховується проти годинникової стрілки від місця умовного розрізу контуру крила.

1.3.4. Рівняння руху пружної конструкції

Конструкція ЛА у загальному випадку має нескінченну кількість степенів вільності. Існує декілька підходів до складання рівнянь руху системи:

– основний – базується на складанні рівнянь Лагранжа II роду. Попередньо необхідно записати вираз потенціальної і кінетичної енергії системи як функції n незалежних узагальнених координат. У разі коливання консолі – це вертикальні або кутові переміщення мас;

– прямий – маси відокремлюються від пружного елемента системи і для кожної з них записують диференціальні рівняння руху. Реакції зв'язків виражаються через переміщення і швидкості системи;

– зворотний – всі маси системи відокремлюються від «скелета» системи. Потім аналізують деформацію цього «скелета» під дією заданих зовнішніх сил і сил інерції.

В рівняннях Лагранжа II роду система зводиться до обмеженої кількості степенів вільності

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i; \quad i = 1, \dots, n, \quad (59)$$

де n – число степенів вільності системи;

q_i – узагальнена координата;

T – кінетична енергія;

Q_i – узагальнені сили, які залежать від зовнішнього впливу – аеродинамічних сил, сил демпфірування (сил опору), пружних сил. Визначають узагальнені сили як суму робіт діючих сил на можливих переміщеннях

$$Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}, \quad (60)$$

де \vec{F}_i – сила, що діє на частинку i ;

$\delta \vec{r}_j$ – можливе переміщення, на якому сила здійснює роботу. Це переміщення спричинено зміною узагальненої координати q_i

$$\delta \vec{r}_j = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i .$$

Узагальнена сила надзвичайно просто визначається для консервативних сил, до яких відносяться сили пружності

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (61)$$

де U – потенціальна енергія, що накопичена в системі.

Сили опору руху (конструкційне демпфірування, сили тертя в з'єднаннях) – неконсервативні, їх роботу слід визначати за формулою (60).

Розглянемо рівняння руху систем із декількома степенями вільності. Основні закономірності, що будуть встановлені на простих об'єктах, можна буде надалі використовувати і для аналізу більш складних систем.

Вільні коливання механічної системи з одним степенем вільності

Для системи з одним степенем вільності (рис. 47) запишемо співвідношення, що описують рух пружної конструкції – її вільних коливань, використовуючи рівняння Лагранжа II роду (59).

На рисунку зображено систему у відхиленому від рівноваги положенні. Розглядають додаткові сили, що виникають у системі. Консоль крила вважають безмасовою, а на її кінці закріплено зосереджену масу m .

Зовнішні сили в площині yz відсутні. На масу діє внутрішня сила F_{np} – реакція пружної конструкції. Така ж сила, але протилежно спрямована, діє на

безмасову консоль. Розподілені по довжині балки згинальні моменти деформують конструкцію, в ній накопичується потенціальна енергія пружних сил.

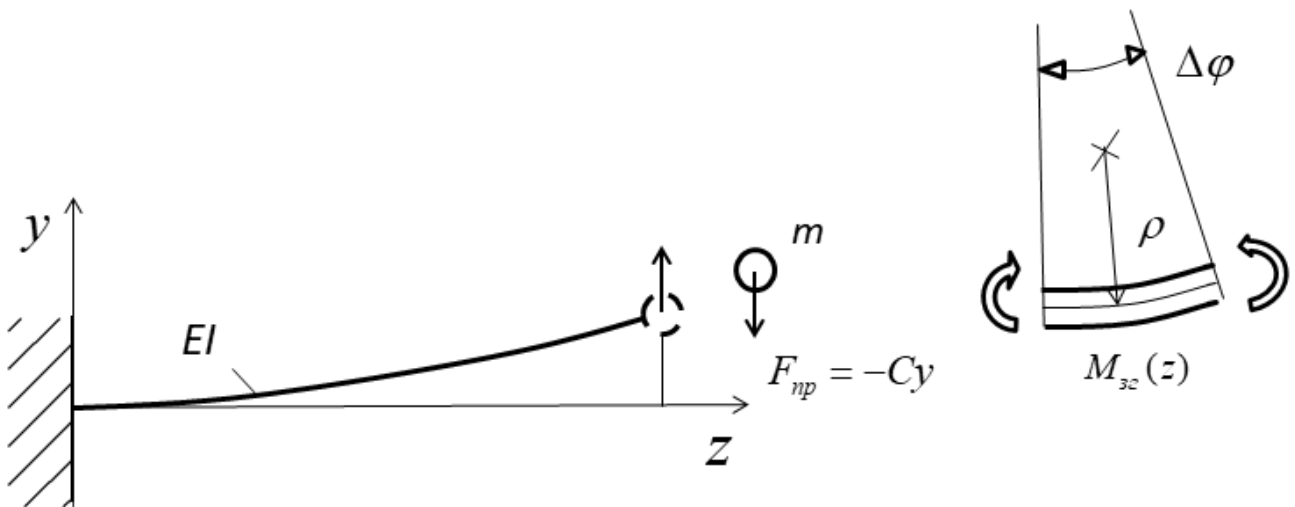


Рис. 47. Пружна конструкція з одним ступенем вільності

Вважаємо, що матеріал крила веде себе лінійно. Кінетична енергія системи (маси

$$T = \frac{m\dot{y}^2}{2},$$

де \dot{y} – швидкість маси.

Потенціальна енергія, яка накопичена в балці, пов'язана з дією згинальних моментів і викривленням осі балки. Вона дорівнює роботі сили $F = -F_{np} = -Cy$, яку потрібно прикласти на кінці балки для її вигину на величину y :

$$U = -A(F) = \frac{1}{2}Cy \cdot y = \frac{Cy^2}{2},$$

де C – жорсткість балки в точці розміщення маси. Для її визначення достатньо прикласти на кінці балки одиничну силу і знайти переміщення δ_{11} , тоді

$$C = 1/\delta_{11}.$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= m\ddot{y}; & Q &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -Cy. \end{aligned} \quad (62)$$

Підставляючи вирази (62) в (59), одержуємо рівняння поступального руху маси m у вигляді другого закону Ньютона

$$m \ddot{y} = -Cy.$$

Якщо позначити $C/m = \omega_c^2$, то рівняння вільних коливань маси має вигляд

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = 0,$$

де ω_c - колова частота власних коливань системи

$$\omega_c = \sqrt{C/m}.$$

Визначення руху системи з використанням рівнянь Лагранжа II роду має свої переваги. Треба виконати формальні процедури: задати узагальнені координати, записати вирази для кінетичної і потенціальної енергій системи і визначити похідні, знайти узагальнену силу. Але є певне застереження. Такий спосіб рішення має недостатню наочність, а формальні дії прикривають важливий фізичний сенс.

Пояснимо рівняння динаміки більш ґрунтовно. Скористаємося загальним рівнянням динаміки матеріальної системи. У вихідному нерухомому положенні сила тяжіння $G = mg$ врівноважена силою пружності балки. Вільні коливання розпочинаються після початкового збурення – відхилення маси від рівноважного положення, надання їй швидкості. У процесі коливань силу тяжіння можна не враховувати і розглядати сили пружності, що викликані додатковою деформацією пружної системи.

Прикладемо до системи задані сили і сили інерції. Система стає динамічно врівноваженою. Запишемо умову її рівноваги – прирівняємо нулю суму віртуальних робіт всіх діючих сил на їх можливому переміщенні

$$\sum \delta A(F) = 0.$$

Можливим переміщенням системи є нескінченно мале вертикальне переміщення маси δr , що задовольняє в'язям у системі. При цьому балка деформується. В елементах балки виникають додаткові кути повороту $\delta \Delta \varphi$ перерізів. Ураховуємо лише дію згинальних моментів на можливих переміщеннях балки. Очевидно, що сума елементарних робіт внутрішніх сил пружності дорівнює елементарній роботі сили $F = -Cy$, яка діє на кінці балки

$$\delta A(F) = -Cy \delta r.$$

Віртуальна робота сили інерції

$$\delta A(F_{in}) = -m\ddot{y}\delta r.$$

Підсумовуючи віртуальні роботи, маємо умову рівноваги системи:

$$-m\ddot{y}\delta r - C y \delta r = 0.$$

Як видно, отримали те ж саме рівняння руху.

Вимушені коливання системи з одним ступенем вільності

Вимушені коливання системи з одним ступенем вільності відбуваються під дією сил пружності, сил в'язкого тертя, пропорційних швидкості руху, і вимушених сил, що змінюються, наприклад, за гармонічним законом (рис. 48)

$$F_e(t) = F_0 \sin(\omega_e t),$$

де F_0 і ω_e – амплітуда і частота збуджуючої сили.

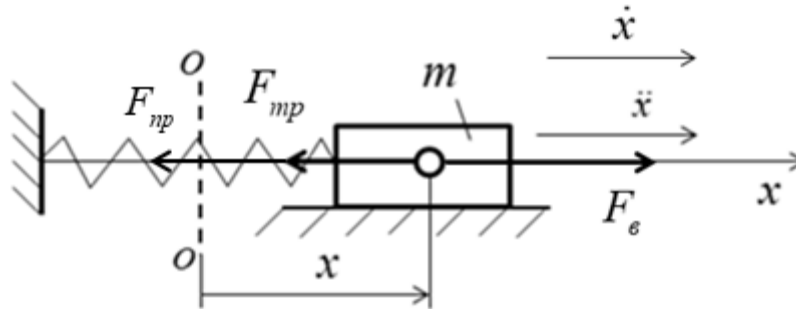


Рис. 48. Вимушені коливання системи

Сили в'язкого тертя пропорційні швидкості руху

$$F_{тр}(\dot{x}) = -\alpha\dot{x},$$

де α – коефіцієнт пропорційності.

Неоднорідне диференціальне рівняння вимушених коливань має вигляд

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_e(t) - F_{np}(x) - F_{mp}(\dot{x}); \\ \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_c^2 x &= \frac{F_0}{m} \sin(\omega_e t), \end{aligned} \quad (63)$$

де $n = \frac{\alpha}{2m}$ – коефіцієнт тертя;

$\omega_c = \sqrt{C/m}$ – частота власних коливань.

Відзначимо, що за таким же рівнянням виду (63) відбувається і рух конструкції ЛА, якщо за можливі степені вільності системи вибрані форми її власних коливань.

Задача дослідження руху системи на гармонічне збудження є актуальною. Довільне збурення, що діє в процесі експлуатації на конструкцію, може бути розкладено в ряд

$$F(t) = F^{(0)} + \sum_i F^{(ic)} \cos i\omega t + \sum_i F^{(is)} \sin i\omega t, \quad (64)$$

де $F^{(0)}$ – постійна складова навантаження;

$F^{(ic)}$ і $F^{(is)}$ – амплітуди i -ї гармоніки навантаження.

Згідно із принципом суперпозиції дія сили $F(t)$ може бути замінена вирішенням ряду окремих задач – дослідженням руху системи (63) від кожної з гармонік.

Встановимо важливі фізичні закономірності вимушених коливань.

Характер руху не тільки визначається властивостями системи, але й істотно залежить від зовнішніх сил. При вимушених коливаннях у систему з боку вимушених сил безперервно підводиться енергія, яка витрачається на подолання наявних у системі опорів. Коли частота вимушених сил збігається з частотою власних коливань, настає резонанс, що супроводжується значним (часто небезпечним) збільшенням амплітуд коливань.

Усталений рух у цьому випадку відбувається у вигляді

$$x = x_0 \sin(\omega_e t - \varphi), \quad (65)$$

де x_0 і φ – амплітудне відхилення і зсув фази між силою і переміщенням.

Запишемо вираз (63) у вигляді чотирьох доданків

$$(-m\ddot{x}) + (-\alpha\dot{x}) + (-Cx) + F_0 \sin(\omega_e t) = 0. \quad (66)$$

З урахуванням (65)

$$mx_0\omega_e^2 \sin(\omega_e t - \varphi) + \alpha x_0\omega_e \sin(\omega_e t - \varphi - \pi/2) + Cx_0 \sin(\omega_e t - \varphi + \pi) + F_0 \sin(\omega_e t) = 0. \quad (67)$$

З виразів (66) і (67) випливає, що в будь-який момент часу сума проєкцій чотирьох сил на напрям, перпендикулярний τ , має дорівнювати нулю (рис. 49). Кутове положення вектора сили F_0 задають кутом $\omega_e t$, який відраховують від довільно заданого напрямку τ .

Для вертикального і горизонтального напрямків маємо

$$cx_0 - m\omega_\epsilon^2 x_0 - F_0 \cos \varphi = 0;$$

$$\alpha\omega_\epsilon x_0 - F_0 \sin \varphi = 0.$$

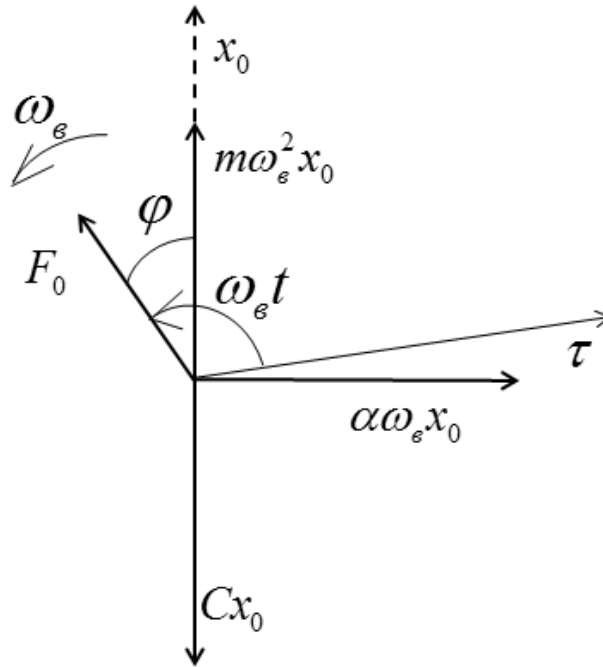


Рис. 49. Векторна діаграма діючих сил

Із цих рівнянь можна визначити, що амплітуда сталих коливань при періодичному збуренні

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(\alpha\omega_\epsilon)^2 + (c - m\omega_\epsilon^2)^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{4n^2\omega_c^2 + (\omega_c^2 - \omega_\epsilon^2)^2}} =$$

$$= \frac{F_0}{c} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_\epsilon^2}{\omega_c^2}\right)^2 - \left(2\frac{\alpha}{\alpha_k} \frac{\omega_\epsilon}{\omega_c}\right)^2}}; \quad (68)$$

а зсув фази між силою і переміщенням буде таким:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2n\omega_\epsilon}{\omega_c^2 - \omega_\epsilon^2} = \frac{\alpha\omega_\epsilon}{c - m\omega_\epsilon^2} = \frac{2\frac{\alpha}{\alpha_k} \frac{\omega_\epsilon}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega_\epsilon^2}{\omega_c^2}\right)}, \quad (69)$$

де ω_c – частота власних коливань; α_k – критичне значення коефіцієнта демпфірування, яке дорівнює

$$\alpha_k = 2m\omega_c.$$

Величина $\delta_{ст} = \frac{F_0}{C}$ – це переміщення, яке виникає в системі при статичній дії амплітудного значення збуджуючої сили.

Коефіцієнтом динамічності називається відношення амплітудного відхилення x_0 до $\delta_{ст}$:

$$\beta = \frac{x_0}{\delta_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2\omega_в^2}{\omega_c^4} + \left(1 - \frac{\omega_в^2}{\omega_c^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \frac{\omega_в^2}{\omega_c^2} + \left(1 - \frac{\omega_в^2}{\omega_c^2}\right)^2}}, \quad (70)$$

де δ – логарифмічний декремент затухання

$$\delta = \frac{2\pi n}{\omega_c}. \quad (71)$$

Величину коефіцієнта динамічності при різних значеннях логарифмічного декременту загасання показано на рис. 50 , а зміну кута зсуву фази при різних значеннях α/α_k – на рис. 51 .

Графіки залежності коефіцієнта динамічності β і фази φ від частотного розладу $\omega_в/\omega_c$ при фіксованому значенні відносного коефіцієнта демпфірування n/ω_c називаються амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) і відповідно фазово-частотною характеристикою (ФЧХ).

У дорезонансної області ($0 \leq \omega_в/\omega_c < 0,75$; $0 \leq \varphi \leq 0,5\pi$) коефіцієнт динамічності β незначно відрізняється від одиниці (амплітуда сталих вимушених коливань близька до статичних переміщень від амплітудного значення вимушеної сили).

У резонансній області ($0,75 \leq \omega_в/\omega_c < 1,25$; $\varphi \approx 0,5\pi$) коефіцієнт динамічності β значно відрізняється від одиниці (амплітуда сталих вимушених коливань більше, ніж статичні переміщення).

У зарезонансній області ($1,25 \leq \omega_в/\omega_c < \infty$; $0,5\pi \leq \varphi < \pi$) коефіцієнт динамічності β наближається до нуля, тобто високочастотна сила практично не викликає вимушених коливань.

Вигляд кривих АЧХ і ФЧХ залежить від величини тертя в коливальній системі n/ω_c . Можливі чотири випадки величини тертя – його немає ($n/\omega_c = 0$), воно мале, тертя критичне і тертя велике.

У першому випадку зазначені криві мають розрив, у другому – $n/\omega_c < 1/\sqrt{2} \approx 0,7$ – вони безперервні, а АЧХ має максимум в інтервалі $0 \leq \omega_B/\omega_c < 1$ (до точного резонансу). Прирівнюючи до нуля похідну від β за $(\omega_B/\omega_c)^2$, отримуємо абсцису і ординату цього максимуму

$$\omega_B/\omega_c = \sqrt{1 - 2(n^2/\omega_c^2)}, \quad \beta_{max} = \omega_c^2/2n\sqrt{\omega_c^2 - n^2}.$$

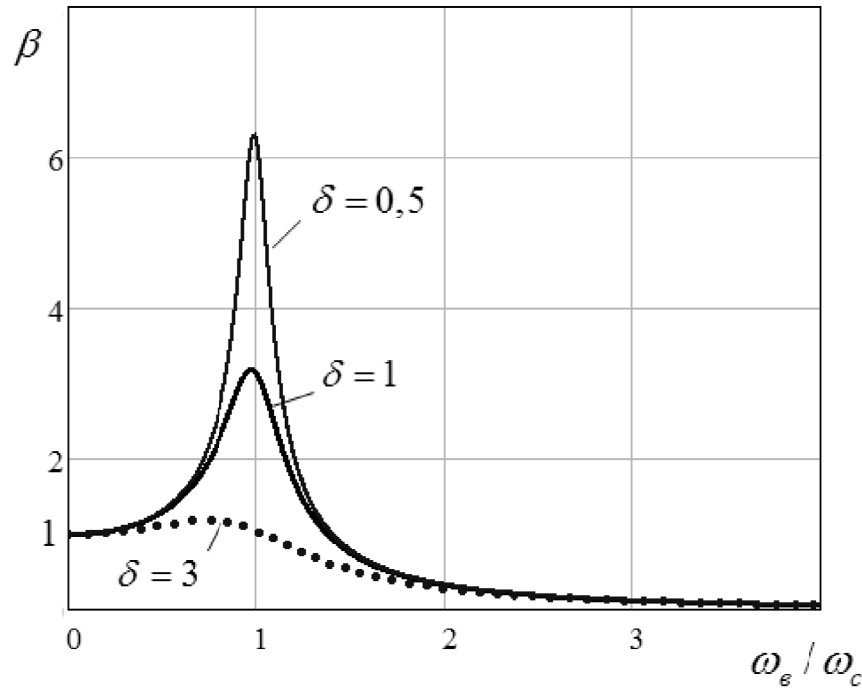


Рис. 50. Зміна коефіцієнта динамічності від ω_B/ω_c

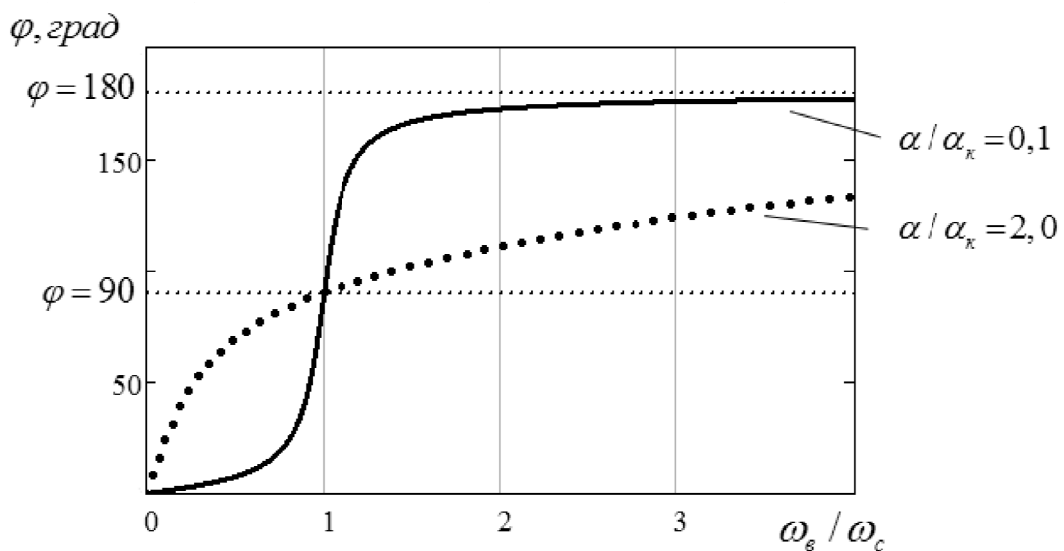


Рис. 51. Зміна кута зсуву фази від ω_B/ω_c

Звідси випливає, що максимум розташований в діапазонах

$$0 < \frac{n^2}{\omega_c^2} \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \omega_B/\omega_c \leq 1.$$

Координата максимуму зменшується при зростанні тертя (див. рис. 36). Найменше значення коефіцієнта динамічності дорівнює одиниці при $\omega_B/\omega_c = 0$.

При малому терті кут зсуву фази між силою і переміщенням близький до нуля, при резонансі він дорівнює $\pi/2$ і прагне до π радіанів при великій частоті вимушених коливань. Характер збільшення кута від ω_B/ω_c значно залежить від тертя в системі.

Третій випадок $n/\omega_c = 1/\sqrt{2}$ – критичний, бо $\beta_{max} = 1$ і резонансу немає (відсутнє збільшення амплітуди коливань вище статичного переміщення). Крива АЧХ – монотонно падаюча, і при $\omega_B/\omega_c = 1$ коефіцієнт динамічності $\beta = 1/\sqrt{2} \approx 0,7$.

У четвертому випадку (велике тертя, $n/\omega_c > 1/\sqrt{2}$), криві АЧХ також монотонно спадають. АЧХ починаються в точці $\omega_B/\omega_c = 0$, $\beta = 1$, яка не є точкою екстремуму, а при $\omega_B/\omega_c = 1$ $\beta \ll 1$.

При дуже малому терті максимальне значення коефіцієнта динамічності β не набагато більше, ніж його значення при точному резонансі $\omega_B/\omega_c = 1$. Останнє легко обчислити, якщо як максимальне значення коефіцієнта прийняти

$$\beta_{max} \approx \frac{\omega_c}{2n} = Q = \frac{\pi}{\delta},$$

де Q – добротність коливальної системи.

При резонансі навіть невелика збурювальна сила викликає значні переміщення (деформації, напруження). Значне збільшення амплітуди коливань відбувається не тільки при точному резонансі ($\omega_B/\omega_c = 1$), але й в деякому його околі – резонансній області. Навіть невелике тертя значно обмежує амплітуду резонансних коливань, і тому має бути враховано при розрахунках. За резонансною зоною тертя можна не враховувати. При великому терті $n/\omega_c > 1/\sqrt{2}$ вимушені коливання навіть у резонансній області не будуть резонансними. Тертя збільшує зсув фази коливань. При точному резонансі незалежно від величини тертя зсув фази дорівнює $0,5\pi$.

Повернемося до векторної діаграми на рис 49 і простежимо, як змінюються залежно від частоти ω амплітуда і зсув фази.

Для дуже повільних коливань ($\omega \approx 0$) загасанням і силою інерції можна знехтувати, а тоді $F_0 = Cx_0$ і $\varphi = 0$ – діюча сила врівноважується силою пружності.

Із зростанням частоти вектор, що зображує силу загасання, зростає, але зате сила інерції зростає ще швидше. Зсув фази вже не може більше залишатися таким, що дорівнює нулю, оскільки сила F_0 повинна мати горизонтальну складову зліва, щоб урівноважити $\alpha\omega x_0$. Вектор сили інерції буде збільшуватися до тих пір, поки він за своєю довжиною не зробиться таким, що дорівнює відновлювальній силі або силі пружності пружини. Тоді $\varphi = \pi / 2$ і $F_0 = \alpha\omega x_0$, а це існує при резонансі, оскільки $m\omega^2 x_0 = Cx_0$ або $\omega_c^2 = C / m$.

Отже, при резонансі зсув фази дорівнює $\pi / 2$ незалежно від загасання. Далі при збільшенні частоти $m\omega^2 x_0$ збільшується інтенсивніше, ніж Cx_0 , внаслідок чого F_0 отримує нахил вниз і φ буде більше, ніж $\pi / 2$.

Для дуже високих частот Cx_0 є незначним порівняно з $m\omega^2 x_0$, так що F_0 врівноважуватиме силу інерції і тоді $\varphi = \pi$.

При малих швидкостях збурювальна сила долає силу пружності; при великих швидкостях ця збурювальна сила йде на подолання інерції, а при резонансі вона врівноважує силу загасання.

Залучимо енергетичні поняття для кращого з'ясування фізичної сторони явища. Робота, що здійснюється силою за час одного повного коливання, дорівнює

$$A = \int_0^{2\pi} F_B \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} F_B \frac{dx}{dt} d(\omega t) = \pi F_0 x_0 \sin \varphi. \quad (71)$$

Для дуже повільних рухів $\varphi = 0$ і за повний період ніяка робота не відбувається. При резонансній частоті $\varphi = \pi / 2$ і величина розсіяної енергії за один період дорівнює $\pi F_0 x_0$. У такому випадку збурювальна сила числено дорівнює силі загасання й протилежна їй, а сила пружності дорівнює силі інерції, але протилежна їй за фазою. Отже, вона знаходиться в одній фазі з переміщенням.

Оцінімо резонансну амплітуду. Енергія, що розсіяна за один період внаслідок загасання, дорівнює $\pi\alpha\omega x_0^2$, а робота вимушених коливань – $\pi F_0 x_0$, отже,

$$\pi F_0 x_0 = \pi\alpha\omega x_0^2. \quad (72)$$

Це співвідношення показано на рис. 52, де по осі абсцис відкладено амплітуди, а по осі ординат – величина роботи за один період, причому одна крива відповідає роботі сили F_0 , а інша – роботі сили загасання.

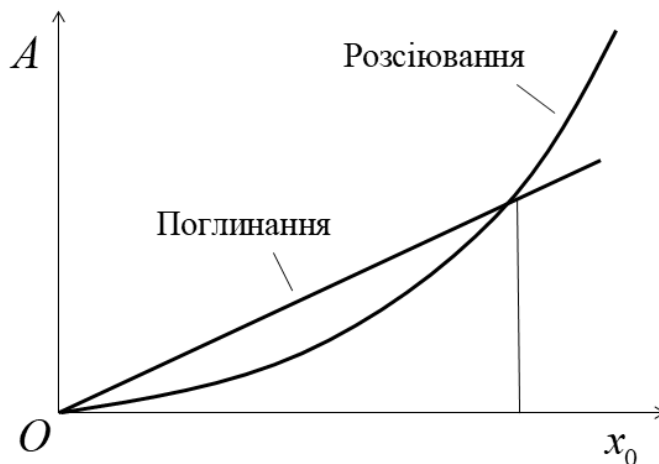


Рис. 52. Робота збудовальної сили і сили демпфірування за один період

У точці перетину кривих маємо енергетичну рівновагу, амплітуда x_0 встановлюється сама собою. Справді, якщо в певний момент часу амплітуда буде більшою, то розсіювання енергії буде більшим, ніж її приплив, що тягне за собою поступове зменшення кінетичної енергії системи до тих пір, поки не буде досягнуто амплітуди, відповідної вказаній рівновазі.

Вирішуючи рівняння (72) щодо x_0 , маємо

$$x_{0\text{рез}} = \frac{F_0}{C\omega} \quad (73)$$

Вільні та вимушені коливання консолі крила з двома степенями вільності

Вільні коливання консолі крила

Розглянемо невагому консоль крила, до якої прикріплено дві зосереджені маси (рис. 53).

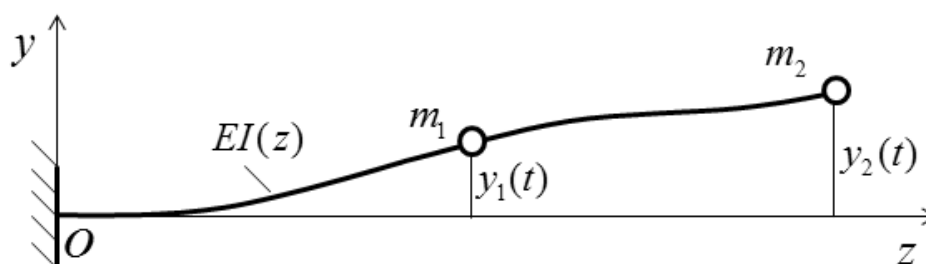


Рис. 53. Згинальні коливання консолі крила

Уявімо крило у вигляді балки з відомою згинальною жорсткістю $EI(z)$ вздовж розмаху. Вважаємо, що зосереджені маси m_1 і m_2 розташовані на осі жорсткості і викликають вигин у процесі поперечних коливань консолі. Така система має два степеня вільності. Як узагальнені координати приймемо вертикальні зміщення мас y_1 і y_2 . Визначимо власні частоти і форми коливань. Знання динамічних характеристик конструкції (форм і частот власних коливань) дозволяє застосувати зручний спосіб дослідження динаміки конструкції – метод заданих форм.

При вільних коливаннях зовнішні сили на крило не діють, коливання відбуваються під дією пружних та інерційних сил. Сили інерції діють на балку, а сили пружності – на маси.

Запишемо рівняння вільних коливань консолі крила на основі рівнянь руху, складених у зворотній формі [9]. Для цього до пружного безмасового «скелета» – консолі крила (рис. 54) прикладемо зосереджені масові сили (сили інерції)

$$F_{iH1} = -m_1\ddot{y}_1, \quad F_{iH2} = -m_2\ddot{y}_2. \quad (74)$$

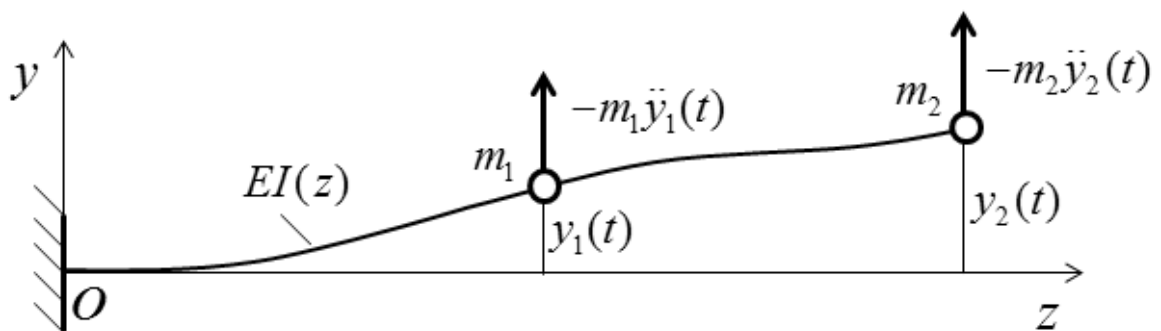


Рис. 54. Сили, що діють на пружну балку

Під дією цих сил балка пружньо деформується. Вважаємо, що конструкція лінійна при навантаженні і справедливим є принцип суперпозиції. Пружні переміщення мас лінійно деформованої системи залежать від кожної з діючих сил:

$$\begin{aligned} y_1 &= F_{iH1}\delta_{11} + F_{iH2}\delta_{12}, \\ y_2 &= F_{iH1}\delta_{21} + F_{iH2}\delta_{22}, \end{aligned} \quad (75)$$

де δ_{ij} ($i, j = 1, 2$) – коефіцієнти піддатливості (переміщення в i -й точці від дії одиничної сили, прикладеної в точці j). Після підстановки співвідношень (74) в рівняння (75) отримаємо диференціальне рівняння руху, записане в зворотній формі:

$$\begin{aligned} y_1 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{11} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{12}, \\ y_2 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{21} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{22}. \end{aligned} \quad (76)$$

Визначимо коефіцієнти піддатливості за допомогою інтеграла Мора

$$\delta_{ij} = \int_0^{l_k} \frac{M_i M_j}{EI} dz,$$

де $M_i(z)$ і $M_j(z)$ – згинальні моменти в перерізах балки від дії одиничних сил (рис. 55):

$$\begin{aligned} M_1(z) &= \left(\frac{l_k}{2} - z\right) \text{ при } z \leq \frac{l_k}{2}; \\ M_2(z) &= l_k - z. \end{aligned}$$

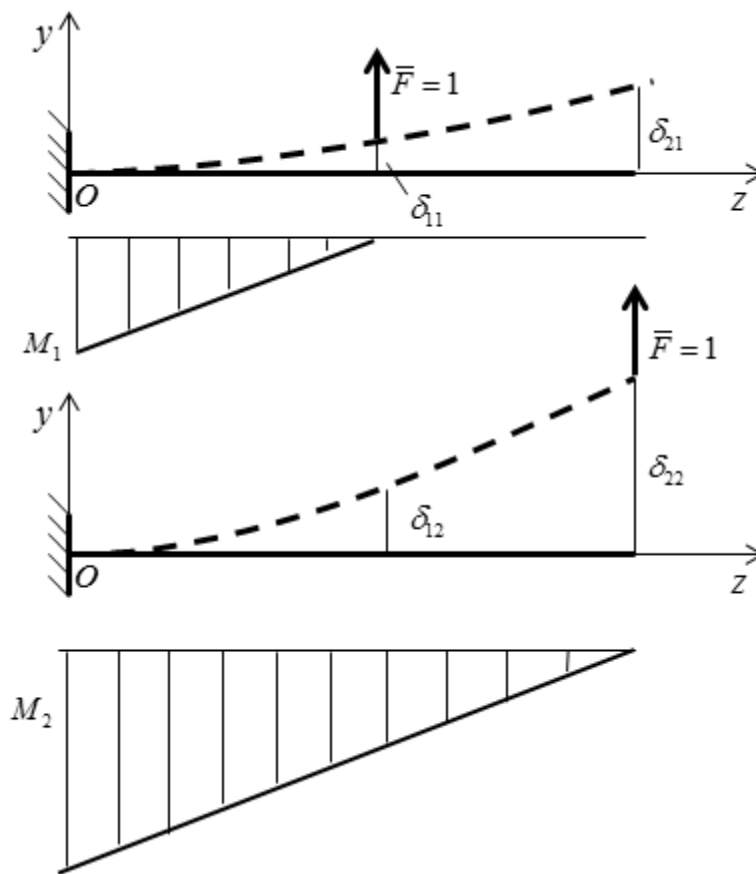


Рис. 55. Епюри згинальних моментів

Диференціальні рівняння руху (76) описують вільні коливання консолі. Рішення системи знаходимо у вигляді

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\omega_c t + \varphi), \\ y_2 &= A_2 \sin(\omega_c t + \varphi), \end{aligned} \quad (77)$$

де A_1 і A_2 – амплітуди коливань мас; ω_c – колова частота власних коливань.

Очевидно, що

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -A_1 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \varphi), \\ \ddot{y}_2 &= -A_2 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \varphi).\end{aligned}$$

Тоді отримуємо такі співвідношення для амплітуд вільних коливань:

$$\begin{aligned}A_1 &= m_1 A_1 \delta_{11} \omega_c^2 + m_2 A_2 \delta_{12} \omega_c^2, \\ A_2 &= m_1 A_1 \delta_{21} \omega_c^2 + m_2 A_2 \delta_{22} \omega_c^2,\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}A_1(m_1 \delta_{11} \omega_c^2 - 1) + A_2(m_2 \delta_{12} \omega_c^2) &= 0, \\ A_1(m_1 \delta_{21} \omega_c^2) + A_2(m_2 \delta_{22} \omega_c^2 - 1) &= 0.\end{aligned}\tag{78}$$

Система лінійних однорідних рівнянь відносно A_1 і A_2 має не нульове рішення за умови, якщо визначник, складений з коефіцієнтів при амплітудах, дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega_c^2 - 1 & m_2 \delta_{12} \omega_c^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega_c^2 & m_2 \delta_{22} \omega_c^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.\tag{79}$$

Рівняння (79) називається частотним, оскільки дозволяє знайти два значення власної частоти коливань – ω_{c1} і ω_{c2} . Відзначимо, що $\omega_{c1} > \omega_{c2}$. Підставивши ці частоти, наприклад, в перше рівняння системи (78), отримуємо співвідношення для амплітуд.

При частоті ω_{c1} значення амплітуди коливань у точці 1 при нормованому відхиленні точки 2, що дорівнює одиниці ($A_{21} = 1$), таке:

$$A_{11} = \frac{m_2 \delta_{12} \omega_{c1}^2}{1 - m_1 \delta_{11} \omega_{c1}^2},$$

а при ω_{c2}

$$A_{12} = \frac{m_2 \delta_{12} \omega_{c2}^2}{1 - m_1 \delta_{11} \omega_{c2}^2}.$$

На рис. 56 показані нормовані форми коливань, відповідні першій та другій власним частотам. При коливаннях консолі з першою власною частотою ω_{c1} обидві маси рухаються в одну сторону.

Коливання консолі з другою власною частотою ω_{c2} характеризуються наявністю нерухомої точки на балці – так званого вузла. Маса в будь-який момент часу рухаються в різні боки.

Коливальний процес у системі може відбуватися паралельно з частотами ω_{c1} і ω_{c2} власних коливань. Загальне рішення системи рівнянь (78) має містити обидві гармоніки, тому запишемо рішення у вигляді

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11} \sin(\omega_{c1}t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_{c2}t + \varphi_2); \\ y_2 &= A_{21} \sin(\omega_{c1}t + \varphi_1) + A_{22} \sin(\omega_{c2}t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (80)$$

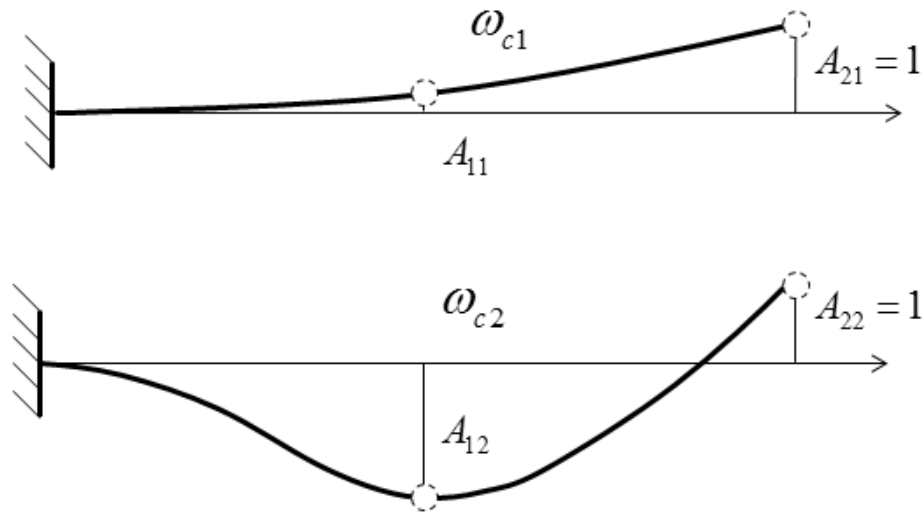


Рис. 56. Форми коливань консолі крила

Отримаємо рівняння вільних коливань консолі на основі рівнянь руху в прямій формі (рис. 57). Для цього необхідно звільнити маси, приклавши до них реакцію відкинутих зв'язків – дію сил пружності з боку деформованої балки.

Позначимо через F_1 і F_2 сили, які необхідно прикласти до балки, щоб отримати переміщення y_1 і y_2 . Тоді сили пружності, що діють на маси, такі ж за величиною, але протилежні за напрямком і залежать від переміщень y_1 і y_2 :

$$F_{np1}(t) = -F_1 = f_1(y_1, y_2); \quad F_{np2}(t) = -F_2 = f_2(y_1, y_2).$$

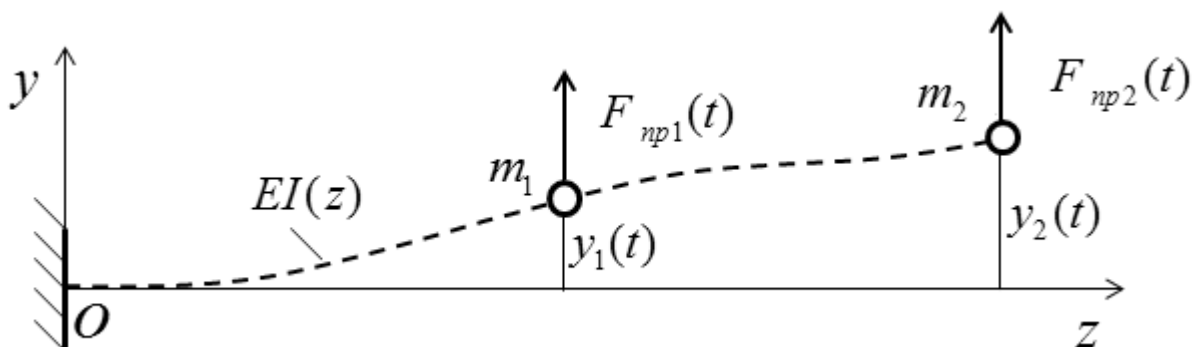


Рис. 57. Сили, що діють на зосереджені маси з боку балки

З огляду на лінійність системи функції f_1 і f_2 – лінійні. Розглянемо два стани системи (рис. 58). На рис. 58,а показані одиничні реакції (коефіцієнти жорсткості), необхідні для створення одиничного переміщення маси 1 за відсутності переміщення маси 2, а на рис. 58, б – одиничні реакції (коефіцієнти жорсткості) для створення одиничного переміщення маси 2 за відсутності переміщення маси 1.

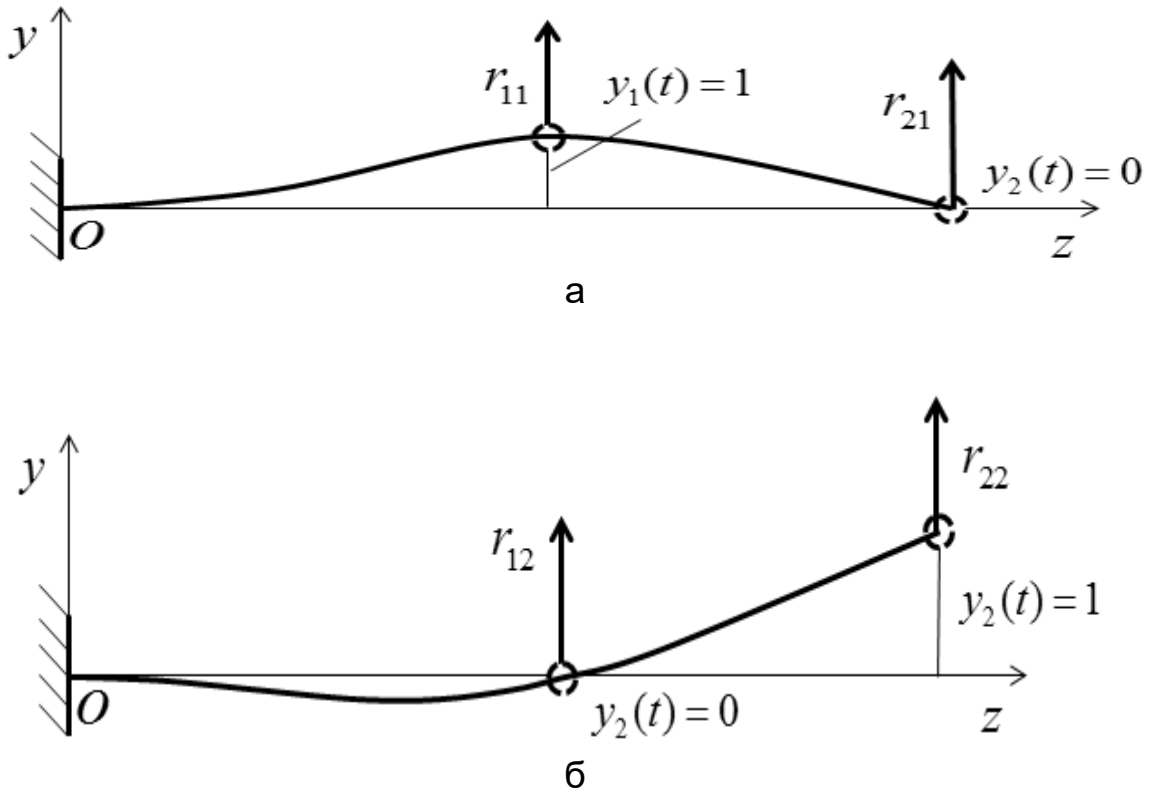


Рис. 58. Визначення коефіцієнтів жорсткості системи

Збільшимо сили r_{11} і r_{21} в y_1 раз, а сили r_{12} і r_{22} – в y_2 . Очевидно, що при накладенні цих навантажень балка буде навантажена силами (рис. 59)

$$F_1 = r_{11}y_1 + r_{12}y_2;$$

$$F_2 = r_{21}y_1 + r_{22}y_2.$$

Згідно з третім законом Ньютона сили, що діють на маси 1 і 2, дорівнюють одна одній за величиною і спрямовані протилежно. Тоді рівняння руху мас, що викликані силами $F_{пр1}$ і $F_{пр2}$, набувають вигляду

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -r_{11}y_1 - r_{12}y_2; \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -r_{21}y_1 - r_{22}y_2. \end{aligned} \tag{81}$$

Система рівнянь (81) допускає безпосереднє числове інтегрування, проте отримати коефіцієнти жорсткості складніше, ніж обчислити коефіцієнти піддатливості. Із системи диференціальних рівнянь вільних коливань на основі прямого методу можна також визначити частоти і форми власних коливань.

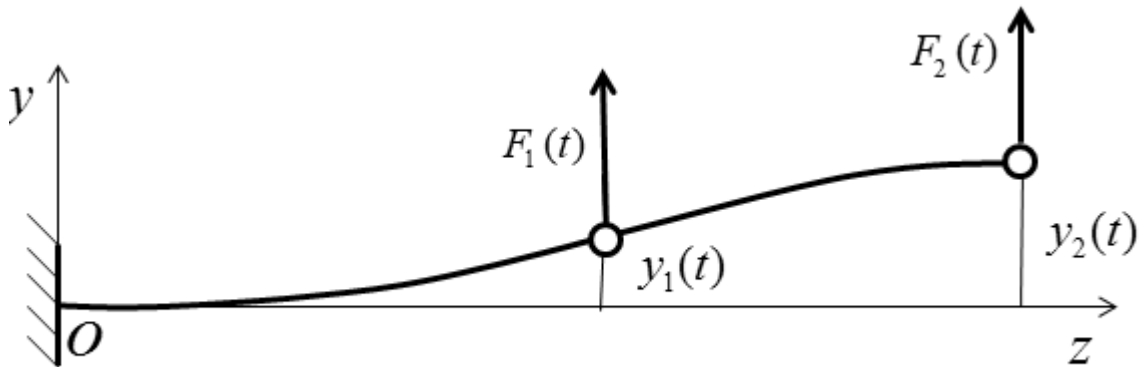


Рис.. 59 . Визначення сил пружності через коефіцієнти жорсткості

Матричний спосіб вирішення рівнянь руху

Скористаємося матричним підходом. Введемо позначення для матриць:

– діагональна матриця мас

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix};$$

– вектор-стовпець пружних переміщень

$$Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix};$$

– вектор-стовпець лінійних прискорень мас

$$\ddot{Y} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix};$$

– квадратна симетрична матриця піддатливості

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix},$$

де $\delta_{12} = \delta_{21}$;

– квадратна симетрична матриця жорсткості

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},$$

де $r_{12} = r_{21}$.

Очевидно, що систему (76), яка записана на основі зворотного способу, можна уявити в матричних позначеннях у вигляді

$$Y = -\delta M \ddot{Y}.$$

При гармонічному русі

$$\ddot{Y} = -\omega_c^2 Y.$$

Тоді

$$Y = \omega_c^2 \delta M Y. \quad (82)$$

Позначивши результат перемноження матриць

$$B = \delta M,$$

одержимо

$$BY = \frac{1}{\omega_c^2} Y,$$

де

$$\lambda = \frac{1}{\omega_c^2}. \quad (83)$$

З лінійної алгебри відомо, що якщо для матриці B після множення на вектор-стовпець Y виконується співвідношення

$$BY = \lambda Y,$$

то λ є власне значення для матриці B , а власний вектор матриці B – це форма власних коливань.

Частота власних коливань з урахуванням (83)

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}. \quad (84)$$

Співвідношення (81), яке записане на основі прямого методу, можна уявити в матричних позначеннях у вигляді

$$M \ddot{Y} = -r Y. \quad (85)$$

Помножимо (85) зліва на матрицю δ

$$\delta M \ddot{Y} = -\delta r Y.$$

Оскільки

$$Y = -\delta M \ddot{Y},$$

то добуток матриць піддатливості і жорсткості

$$\delta r = E, \quad (86)$$

де одинична матриця

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, матриці δ і r – взаємно зворотні:

$$\delta = r^{-1}, \quad r = \delta^{-1}. \quad (87)$$

Зворотний спосіб запису рівнянь руху швидше приводить до мети, оскільки рівняння (76) можна вирішувати числовим методом. При цьому матрицю r отримують як зворотну до матриці δ .

Для безпосереднього підрахунку коефіцієнтів r для балки з двома масами необхідно двічі вирішити один раз статично невизначену систему. Звичайно, легше визначити матрицю δ , а потім, обернувши її, знайти матрицю r .

Вимушені коливання консолі крила з двома степенями вільності

Вимушені коливання консолі проходять під дією збурювальних сил $F_{B1}(t)$ і $F_{B2}(t)$ (рис. 60, 61).

Отримаємо рівняння на основі прямого способу. Рівняння руху мас, викликані силами пружності F_{np1} і F_{np2} і збурювальними силами $F_{B_i}(t)$ ($i = 1, 2$), набувають вигляду

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -r_{11}y_1 - r_{12}y_2 + F_{B1}(t); \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -r_{21}y_1 - r_{22}y_2 + F_{B2}(t). \end{aligned} \quad (88)$$

Система рівнянь (88) допускає безпосереднє числове інтегрування на ЕОМ, оскільки кожне рівняння містить лише одну вищу похідну.

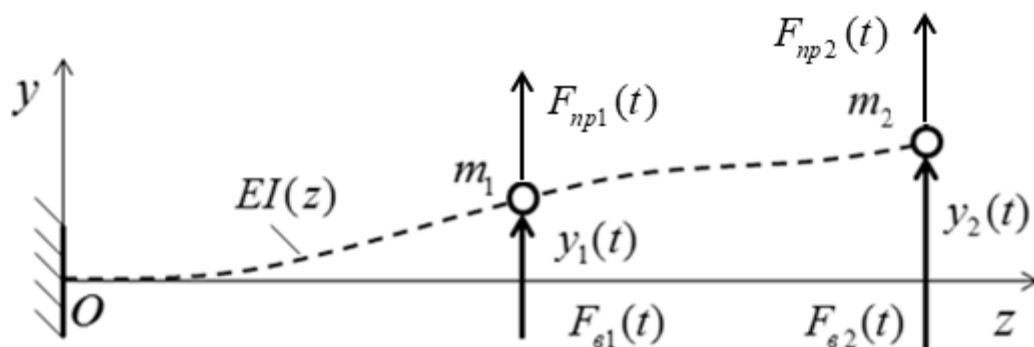


Рис. 60 . Прямий спосіб складання рівнянь руху

У матричних позначеннях система (88) має вигляд

$$m\ddot{Y} + rY = F_{\epsilon}, \quad (89)$$

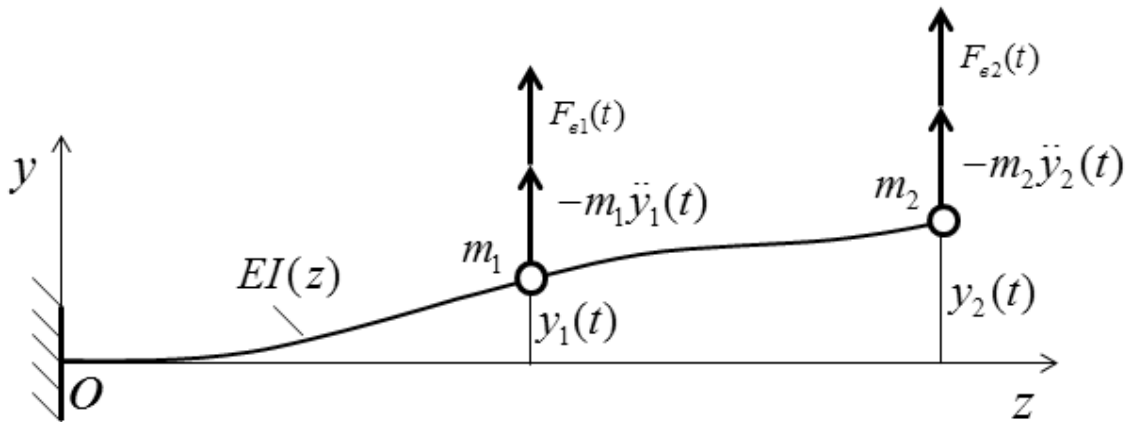


Рис. 61. Зворотний спосіб складання рівнянь руху

де F_{ϵ} – вектор-стовпець зовнішніх сил

$$F_{\epsilon} = \begin{Bmatrix} F_{\epsilon 1} \\ F_{\epsilon 2} \end{Bmatrix}.$$

Коливання зацмленого крила з довільним розподілом мас і жорсткостей вздовж розмаху

Отримаємо рівняння руху неоднорідного крила з довільним розподілом мас і жорсткостей вздовж розмаху, яке зацмлене до нерухомого фюзеляжу. Система має нескінченне число степенів вільності.

Скористаємося наближеним підходом – методом дискретизації. Цей метод полягає у зведенні системи до механічної системи з кінцевим числом степенів вільності: Чим більше буде розглянуто мас у методі дискретизації, тим точніше розрахункова схема конструкції.

Конструкцію консолі згідно із зворотним методом наведемо як безмасову балку, що має жорсткість, до якої в n точках прикріплені зосереджені маси m_i , $i = 1, \dots, n$. Якщо маси не можна вважати зосередженими, то треба враховувати їх момент інерції.

На рис. 62 показано зацмлене до фюзеляжу крило, яке навантажено заданими силами $F_i(t)$. Змінні сили збуджують пружні коливання консолі. З'являються додаткові сили інерції, що передаються на безмасову консоль. Така розрахункова схема відповідає розташуванню

зосереджених мас на осі жорсткості. У цьому випадку відбуваються ізольовані згинальні коливання.

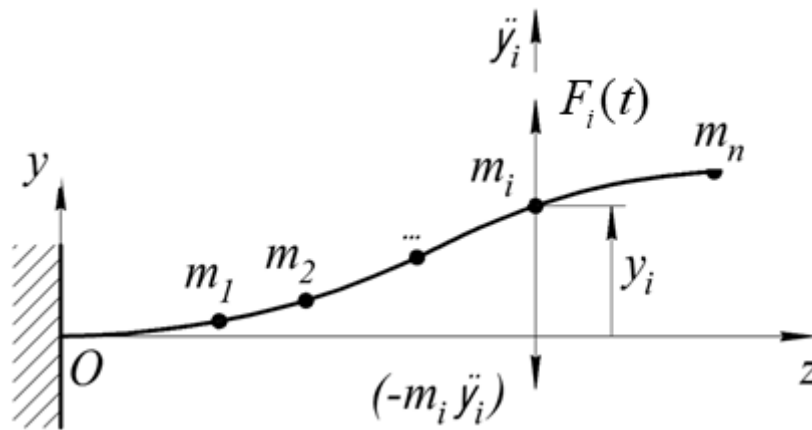


Рис. 62. Консоль як система з n зосередженими масами

При розбіжності лінії центрів мас і жорсткості відбуваються сумісні згинально-крутильні коливання. У процесі коливань на елемент балки діють сили інерції $(-m\ddot{y})$ і моменти сили інерції $(-I\ddot{\varphi})$ (рис. 63). На рисунку позначено: y – вертикальне переміщення центру мас поперечного перерізу; \ddot{y} і $\ddot{\varphi}$ – лінійне і кутове прискорення відсіку.

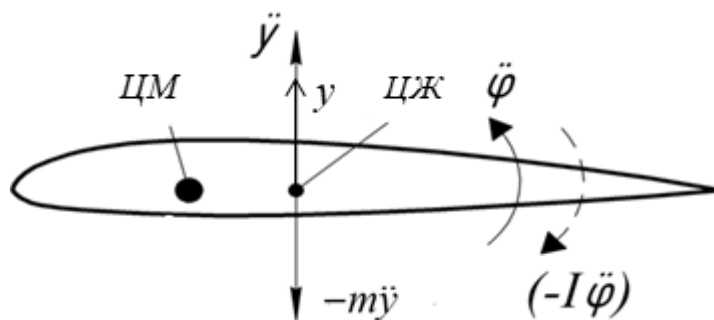


Рис. 63. Дія сили інерції і моменту сили інерції

У системі (рис. 64) кожна з мас, що розташована на осі жорсткості, має масовий момент інерції $dI_{кр i}$, $i = 1 \dots n$. Крило можна уявити як безмасову консоль з n закріпленими дисками. В системі можливі ізольовані крутильні коливання. Безмасова вісь має крутильну жорсткість. У процесі пружного деформування на вісь діють елементарні моменти сил інерції.

Надалі вважаємо, що конструкція – лінійно-пружна. Для неї справедливі лінійні співвідношення між переміщеннями точок y_1, y_2, \dots, y_n і відповідними силами, які діють на консоль $F_{к1}, F_{к2}, \dots, F_{кn}$.

До сил слід віднести не тільки зовнішні, але і інерційні. Переміщення і сили необхідно вважати як узагальнені. Якщо y_i є кутове переміщення, то відповідною силою буде момент, що діє уздовж переміщення.

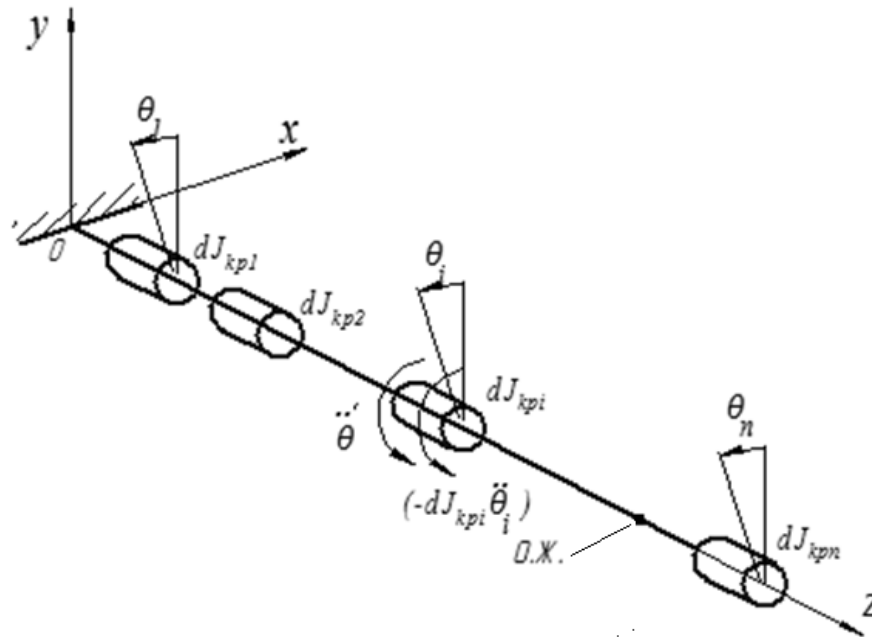


Рис. 64. Консоль як система n дисків

На основі принципу суперпозиції для діючих сил пружні переміщення точок визначають через сили лінійним чином:

$$y_i = \delta_{i1}F_{k1} + \delta_{i2}F_{k2} + \dots + \delta_{in}F_{kn}, \quad i = 1, \dots, n \quad (90)$$

У більш стислій формі отримаємо

$$y_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}F_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (91)$$

де δ_{ij} – коефіцієнт впливу (піддатливості) для переміщень, тобто переміщення уздовж координати y_i , що викликано одиничною узагальненою силою $\bar{F}_j = 1$, яка прикладається в точці j і діє вздовж переміщення y_j . Коефіцієнт δ_{ij} називають ще одиничним переміщенням.

Коефіцієнти піддатливості визначають методами опору матеріалів на основі інтеграла Мора

$$\delta_{ij} = \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI(z)} dz,$$

де $\bar{M}_i(z)$ і $\bar{M}_j(z)$ – моменти вздовж довжини балки від одиничних узагальнених сил, що прикладені в точках i, j . Інтегрування відбувається по всій довжині l_k балки. Слід відмітити, що лінійні переміщення визначаються тут деформацією згину, а зсувом перерізів балки ми нехтуємо.

У матричній формі співвідношення (91) мають вигляд

$$\{y\} = [\delta]\{F_k\}, \quad (92)$$

де $\{y\}$ – вектор-стовпець узагальнених координат (переміщень або кутів повороту)

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}; \quad (93)$$

$\{F\}$ – вектор-стовпець узагальнених сил

$$\{F_k\} = \begin{Bmatrix} F_{k1} \\ F_{k2} \\ \dots \\ F_{kn} \end{Bmatrix}; \quad (94)$$

$[\delta]$ – матриця коефіцієнтів впливу для переміщень:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Введемо матрицю коефіцієнтів жорсткості

$$[r] = [\delta]^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad (96)$$

яка є зворотною до матриці δ . Очевидно, що добуток матриць є одинична матриця

$$[\delta][\delta]^{-1} = E.$$

Помножимо зліва матричне співвідношення (92) на матрицю r :

$$[r]\{y\} = \{F\}. \quad (97)$$

У розгорнутому вигляді маємо вираз сили F_{ki} ($i = 1, \dots, n$), яка додається до i -ї точки системи, через переміщення всіх n навантажених точок:

$$\begin{aligned}
F_{k1} &= r_{11}y_1 + r_{12}y_2 + \dots + r_{1n}y_n; \\
F_{k2} &= r_{21}y_1 + r_{22}y_2 + \dots + r_{2n}y_n; \\
&\dots \\
F_{kn} &= r_{n1}y_1 + r_{n2}y_2 + \dots + r_{nn}y_n,
\end{aligned}
\tag{98}$$

де r_{ij} – коефіцієнти впливу, аналогічні коефіцієнтам методу переміщень.

Фізичний сенс елементів r_{ij} випливає з такого уявлення: нехай переміщення $y_j = 1$, а решта дорівнює нулю (на ці переміщення накладені додаткові зв'язки). Тоді $r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{nj}$ – це реакції, відповідні переміщенням y_1, y_2, \dots, y_n , які необхідні для реалізації зазначених переміщень. Вони називаються одиничними реакціями.

Скористаємося встановленими співвідношеннями для запису рівнянь руху системи з n степенями вільності на прикладі основного, прямого і зворотного способів.

Отримаємо малі коливання пружної системи в формі рівнянь *Лагранжа II роду* – універсального способу складання рівнянь руху механічної системи.

Рівняння Лагранжа II роду для кожної з узагальнених координат y_i мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} = - \frac{\partial U}{\partial y_i} + Q_i,
\tag{99}$$

де T і U – кінетична і потенціальна енергії системи, виражені через узагальнені координати;

$\left(- \frac{\partial U}{\partial y_i} \right)$ – узагальнена сила, пов'язана з роботою сил пружності;

Q_i – узагальнена сила, відповідна зовнішнім неконсервативним збурювальним силам. Очевидно, що

$$Q_i = F_i.$$

Потенціальну енергію пружної системи можна обчислити так:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_{ki} y_i,
\tag{100}$$

де F_{ki} – сила, що діє в i -й точці пружної системи. Виразимо силу F_{ki} через переміщення точок, тоді

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} y_i y_j.
\tag{101}$$

Кінетична енергія системи виражається поширеним на всю її масу інтегралом

$$T = \frac{1}{2} \int_m \overrightarrow{R}^2 dm, \quad (102)$$

де \vec{R} – радіус-вектор елементарної маси dm ; $\dot{\vec{R}}$ – його похідна за часом. Оскільки положення системи визначається координатами y_1, y_2, \dots, y_n , то

$$\vec{R} = \vec{R}(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Звідси

$$\dot{\vec{R}} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{R}}{\partial y_i} \dot{y}_i;$$

$$\dot{\vec{R}}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial y_j} \right) \dot{y}_i \dot{y}_j,$$

(у дужках позначено скалярний добуток векторів).

Таким чином, для кінетичної енергії системи отримуємо вираз

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j, \quad (103)$$

де m_{ij} – так звані інерційні коефіцієнти

$$m_{ij} = \int_m \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial y_j} \right) dm,$$

вони утворюють симетричну $n \times n$ матрицю мас. При малих коливаннях похідні $\frac{\partial \vec{R}}{\partial y_i}$ у процесі руху можна вважати постійними, тому матриця мас є постійною за часом.

Вигляд матриці мас залежить від вибору координат y_i . Якщо за координати системи взяті переміщення центрів мас тіл у трьох взаємно перпендикулярних напрямках і їх повороти щодо головних центральних осей інерції, то кінетична енергія виражається формулою

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i^2, \quad (104)$$

де множниками при квадратах лінійних швидкостей будуть маси тіл, а при квадратах кутових швидкостей – відповідні моменти інерції. В цьому випадку матриця мас діагональна:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix}. \quad (105)$$

При другому виборі координат матриця мас – недіагональна. Очевидно, що

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j = \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_j ;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) = \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{y}_j ; \quad \frac{\partial T}{\partial y_i} = 0 ;$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} y_i y_j = \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j .$$

Тоді рівняння руху мають вигляд

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{y}_j + \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (106)$$

Якщо матриця $[m]$ діагональна, то

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i, \\ m_i & \text{при } j = i \end{cases}$$

і рівняння (106) спрощуються:

$$m_i \ddot{y}_i + \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (107)$$

Фізично сенс (107) очевидний – це рівняння руху маси m_i , до якої прикладені зовнішня сила F_i і реакція пружної системи $F_{np} = -F_{\kappa i}$.

Систему рівнянь можна вирішити щодо переміщень y_i . Оскільки матриці жорсткості й піддатливості взаємно зворотні, то рівняння можна записати так:

$$y_i = \sum_{j=1}^n (F_j - m_j \ddot{y}_j) \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (108)$$

Як видно з (108), переміщення y_i в силу принципу суперпозиції визначаються дією заданих сил F_j і сил інерції $(-m_j \ddot{y}_j)$.

Рівняння (107) і (108) справедливі тільки для діагональної матриці мас, в іншому випадку слід користуватися більш загальними рівняннями (106).

Скористаємося прямим і зворотним способами складання рівнянь руху.

Прямий спосіб. Із системи вирізають маси m_i (рис. 65). На кожну з них діють зовнішні сили $F_i(t)$ і внутрішні сили пружності F_{npi} (з боку деформованої конструкції).

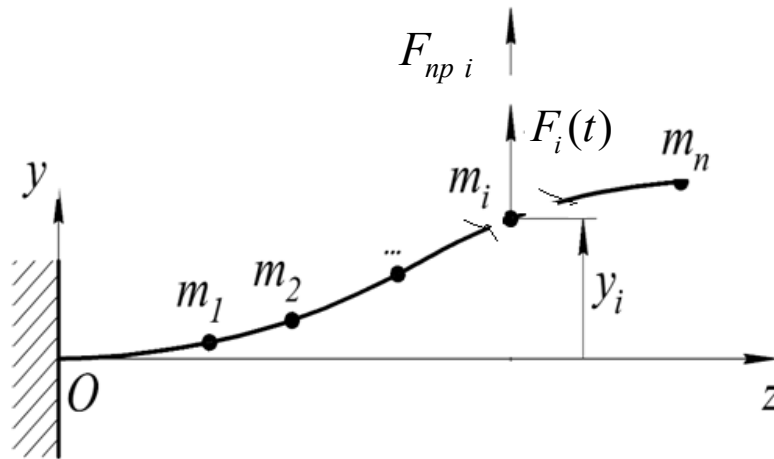


Рис. 65. Сили, що діють на маси

Сили пружності, що діють на маси:

$$\{F_{np}\} = -\{F_k\} = -[r]\{y\}, \quad (109)$$

де $\{F_k\}$ – вектор-стовпець сил, що діють на балку з боку мас. Рівняння руху мас можна записати у вигляді системи:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= F_{np1} + F_1; \\ m_2 \ddot{y}_2 &= F_{np2} + F_2; \\ &\dots \\ m_n \ddot{y}_n &= F_{npi} + F_n, \end{aligned} \quad (110)$$

а в матричному вигляді

$$[m]\{\ddot{y}\} = -[r]\{y\} + \{F\},$$

де $\{\ddot{y}\}$ – вектор-стовпець узагальнених прискорень точок системи;

$\{F\}$ – вектор-стовпець зовнішніх сил.

Таким чином, отримано систему n диференціальних рівнянь другого порядку, яка описує рух конструкції. Недолік цих рівнянь – у кожне з них входять всі n невідомих, тому виникають труднощі при їх інтегруванні.

Якщо вектор $\{F\}$ дорівнює нулю, то отримуємо систему рівнянь, що описують вільні коливання:

$$[m]\{\ddot{y}\} = -[r]\{y\}.$$

Зворотний спосіб. До пружної безмасової конструкції слід прикласти сили з боку відкинутих мас. Оскільки справедливий другий закон Ньютона

$$m_i \ddot{y}_i = F_i(t) + F_{\text{пр } i},$$

то сила, що діє на безмасову пружну конструкцію, має вигляд

$$F_{\text{к } i} = -F_{\text{пр } i} = F_i(t) + (-m_i \ddot{y}_i). \quad (111)$$

Переміщення i -ї точки від системи сил $F_{\text{к } i}$ ($i = 1, \dots, n$) у силу принципу суперпозиції

$$y_i = \delta_{i1} F_{\text{к } 1} + \delta_{i2} F_{\text{к } 2} + \dots + \delta_{in} F_{\text{к } n} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} F_{\text{к } j}.$$

Підставляючи замість $F_{\text{к } j}$ вираз (111), отримуємо

$$y_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} [F_j + (-m_j \ddot{y}_j)]. \quad (112)$$

При вільних коливаннях $F_j(t) = 0$, тоді

$$y_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} (-m_j \ddot{y}_j),$$

тобто пружні переміщення точок системи визначаються тільки силами інерції мас. Якщо $\ddot{y}_j = 0$, то пружні деформації конструкції відсутні.

У матричному вигляді рівняння набуває вигляду

$$\{y\} + [\delta][m]\{\ddot{y}\} = [\delta]\{F\}.$$

Помножимо вираз зліва на $[\delta]^{-1}$:

$$[m]\{\ddot{y}\} + [r]\{y\} = \{F\}.$$

Ми врахували, що

$$[\delta]^{-1} = [r],$$

і добуток матриць

$$[\delta]^{-1}[\delta] = E$$

дорівнює одиничній матриці E

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, пряма і зворотна форми рівнянь руху рівноправні.

У кожному разі перевагу віддають тій формі, в якій рівняння має більш простий вигляд або нескладно вирахувати його коефіцієнти

На рис. 66 показано пружномасову модель крила з двигуном на пілоні, яку спрощено показано як систему двох тіл 1 і 2.

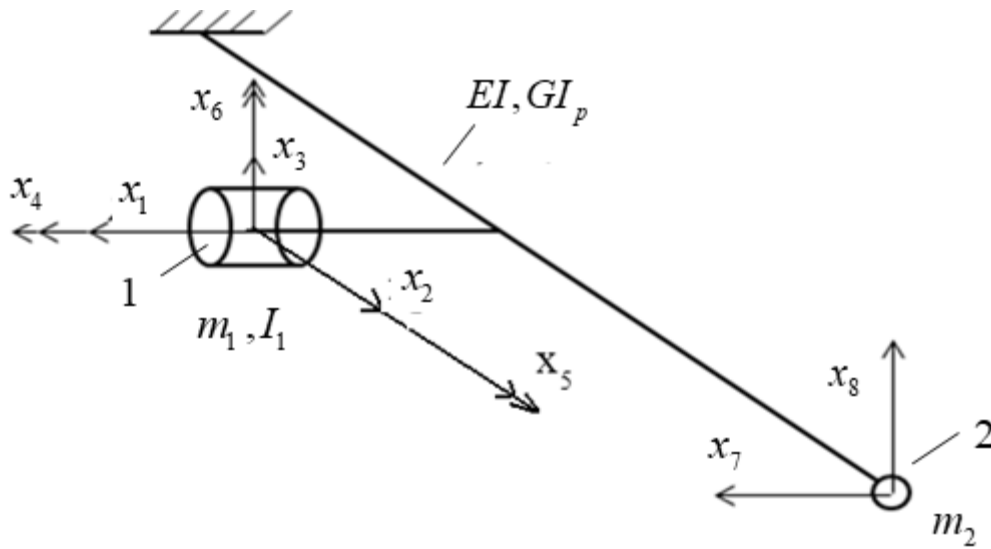


Рис. 66. Пружномасова модель крила

Тіло 1 має масу m_1 і характеризується моментами інерції I_1, I_2 і I_3 щодо головних центральних осей інерції. Тіло 2 показано як зосереджену масу m_2 . Пружні властивості крила і пілона двигуна визначаються згинальною EI і крутильною $GI_{кр}$ жорсткостями системи трьох перехресних балок.

Деформацією розтягування-стиснення балок нехтуємо. Тоді система характеризується вісьмома степенями вільності ($n = 8$). Позначимо через $x_i, i = 1, \dots, 8$ невідомі координати. Координати x_1, x_2 і x_3 задають три взаємно перпендикулярних переміщення центру мас тіла 1 (двигуна), а координати x_4, x_5 і x_6 – його кутові переміщення. Вони показані як вектори повороту з подвійними стрілками. Положення зосередженої маси m_2 визначається координатами x_7 і x_8 .

Кінетична енергія механічної системи складається з енергій тіл 1 і 2:

$$T = T_1 + T_2,$$

а кінетична енергія абсолютно твердого тіла 1 згідно з теоремою Кьоніга – з кінетичної енергії центру мас і кінетичної енергії відносного руху тіла, пов'язаного з обертанням навколо центру мас. Тому

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{x}_4^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{x}_5^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{x}_6^2,$$

де \dot{x}_1, \dot{x}_2 і \dot{x}_3 – проекції швидкості центру мас; \dot{x}_4, \dot{x}_5 і \dot{x}_6 – проекції вектора кутової швидкості на напрямки x_1, x_2 і x_3 .

Матеріальна точка m_2 має енергію

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_7^2 + \dot{x}_8^2),$$

де \dot{x}_7, \dot{x}_8 – проекції швидкості на напрями x_7 і x_8 .

Таким чином, кінетична енергія механічної системи така:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 m_i \dot{x}_i^2,$$

де m_i – елементи діагональної матриці мас $[m]$ розміром (8×8) :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}.$$

1.3.5. Частоти і форми власних коливань

Власні коливання неоднорідного защемленого крила

Власні (вільні) коливання неоднорідного защемленого крила відбуваються під дією тільки пружних сил. Силами демпфірування знехтуємо. Власні коливання характеризуються частотами і формами. Частоти і форми коливань є основними динамічними характеристиками, необхідними для визначення руху та навантаження конструкції.

Власні (вільні) коливання відбуваються за відсутності збурювальних сил. З виразу (106) випливають рівняння руху, відповідні цим коливанням:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{y}_j + \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j = 0. \quad (113)$$

Рівняння (113) – однорідні. Рішення, що відповідає гармонічним коливанням, знаходимо у вигляді

$$y_i = A_i \sin(\omega_c t + \varphi) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (114)$$

де A_i – амплітуда коливань в i -й точці;

ω_c – частота власних коливань;

φ – фаза коливань.

Після підстановки (114) в (113) і скорочення на загальний множник $\sin(\omega_c t + \varphi)$ отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо постійних A_i :

$$\sum_{j=1}^n (r_{ij} - \omega_c^2 m_{ij}) A_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (115)$$

або

$$A_i - \omega_c^2 \sum_{j=1}^n m_j A_j \delta_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (116)$$

У систему рівнянь (116) як параметр входить квадрат кутової частоти коливань. У разі діагональної матриці мас систему (115) можна записати у вигляді

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} A_j - \omega_c^2 m_i A_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (117)$$

Співвідношення (117) являють собою рівняння динамічної рівноваги мас m_i у положенні амплітудних відхилень, коли на них впливають сили пружності

$$\left(- \sum_{j=1}^n r_{ij} A_j \right)$$

і сили інерції $\omega_c^2 m_i A_i$.

Вирази (115) дозволяють знайти амплітудні переміщення, викликані дією сил інерції. Тому для складання співвідношень, що визначають форми вільних коливань A_i , немає необхідності складати рівняння руху, можна обмежитися розглядом системи при амплітудних відхиленнях.

Система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь (115) щодо невідомих A_i має нульове рішення, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} (r_{11} - \omega_c^2 m_{11}) & (r_{12} - \omega_c^2 m_{12}) & \dots & (r_{1n} - \omega_c^2 m_{1n}) \\ (r_{21} - \omega_c^2 m_{21}) & (r_{22} - \omega_c^2 m_{22}) & \dots & (r_{2n} - \omega_c^2 m_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (r_{n1} - \omega_c^2 m_{n1}) & (r_{n2} - \omega_c^2 m_{n2}) & \dots & (r_{nn} - \omega_c^2 m_{nn}) \end{vmatrix} = 0. \quad (118)$$

Співвідношення (118) є алгебраїчне рівняння n -го ступеня щодо ω_c^2 і називається частотним. Якщо положення системи, від якого відраховують переміщення y_i , є положення стійкої статичної рівноваги, то всі n коренів – дійсні та позитивні.

Таким чином, система з n степенями вільності має n частот власних коливань.

При діагональній матриці мас частотні рівняння запишемо так:

$$\begin{vmatrix} (r_{11} - \omega_c^2 m_1) & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & (r_{22} - \omega_c^2 m_2) & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & (r_{nn} - \omega_c^2 m_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (119)$$

Кожній власній частоті $\omega_{c_k}^2$ відповідає певна форма коливання, тобто співвідношення між амплітудними переміщеннями A_i .

Дійсно, якщо $\omega_c^2 = \omega_{c_k}^2$, то визначник виразу (119) дорівнює нулю. У цьому випадку тільки $n-1$ рівнянь лінійно незалежні. Задавши довільно одне амплітудне переміщення, можна знайти всю решту:

$$(A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{nk}).$$

Тут перший індекс означає номер переміщення, а другий – номер форми коливання.

Зазвичай частоти і форми власних коливань нумерують у порядку зростання частот. Тому $k = 1$ відповідає нижчій, а $k = n$ – вищій власній частоті.

Кожному номеру k відповідає рішення рівнянь у формі

$$y_i = (C_{1k} \cos \omega_{c_k} t + C_{2k} \sin \omega_{c_k} t) A_{ik}. \quad (120)$$

Рухи відповідно до (120) називаються головними коливаннями системи.

Співвідношення ортогональності

Двом різним головним коливанням із власними частотами ω_{c_k} , ω_{c_l} відповідають форми A_{ik} і A_{il} , пов'язані співвідношеннями ортогональності

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{ik} A_{jl} = 0 \quad (121)$$

або

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} A_{ik} A_{jl} = 0. \quad (122)$$

Розглянемо координати системи, відповідні k -й формі власних коливань:

$$y_i = A_{ik}.$$

Щоб викликати такі переміщення, необхідно до системи докласти зусилля

$$F_{ik} = \sum_{j=1}^n r_{ij} A_{jk} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

При власних коливаннях амплітуди задовольняють рівнянню

$$\sum_{j=1}^n (r_{ij} - \omega_{ck}^2 m_{ij}) A_{jk},$$

тому

$$F_{ik} = \omega_{ck}^2 \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{jk} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогічно переміщення A_{il} , відповідні l -й формі, можна розглядати як результат впливу статично прикладених сил

$$F_{il} = \omega_{cl}^2 \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{jl}.$$

Для двох станів (1 – переміщення A_{ik} від сили F_{ik} ; 2 – переміщення A_{il} від сили F_{il}) застосуємо теорему про взаємність робіт:

$$\sum_{i=1}^n F_{ik} A_{ie} = \sum_{i=1}^n F_{il} A_{ik}.$$

Тоді отримаємо

$$\omega_{ck}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{jk} A_{il} = \omega_{cl}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{jl} A_{ik}.$$

Якщо матриця мас є симетричною, то подвійні суми в обох частинах рівності збігаються, тому

$$(\omega_{ck}^2 - \omega_{cl}^2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{ik} A_{jl} = 0,$$

що рівносильно (121), оскільки $\omega_{ck} \neq \omega_{cl}$.

Уявімо подвійну суму так:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{jk} A_{il} = \sum_{i=1}^n \left(A_{ik} \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{jl} \right) = 0. \quad (123)$$

При $\omega_c = \omega_{cl}$ маємо

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} A_{jl} = \frac{1}{\omega_{cl}} \sum_{j=1}^n r_{ij} A_{jl}.$$

Після підстановки цього виразу в (123) приходимо до співвідношення ортогональності (122).

Для окремого випадку системи з діагональною матрицею мас перша умова ортогональності має вигляд

$$\sum_{i=1}^n m_i A_{ik} A_{il} = 0, \quad (124)$$

де під знаком суми стоїть скалярний добуток переміщень

Симетрія системи

Часто механічна система має властивість симетрії щодо деякої площини. Симетрія передбачає симетрію в геометрії системи, в розподілі мас і жорсткостей системи і в умовах її закріплення.

Очевидно, якщо конструкція має площину симетрії, то можливі тільки симетричні і косиметричні форми коливань, яким відповідають певні частоти власних коливань. На рис. 67 показано закріплення крила до фюзеляжу

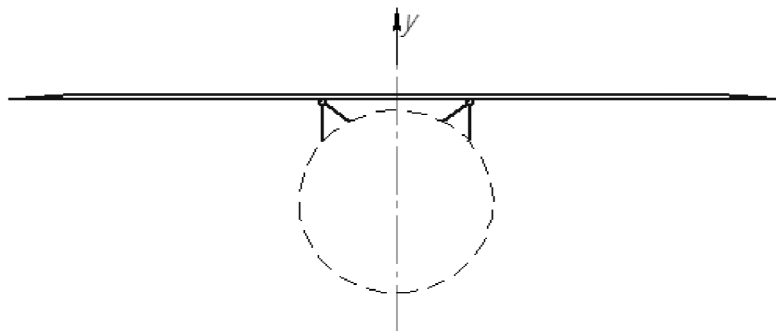


Рис. 67. Закріплення крила до фюзеляжу

Для крила характерні всі види симетрії – геометрична, масова і симетрія в розподілі жорсткостей. Площина симетрії проходить через вісь Oy .

На рис. 68 показано довільну форму пружної лінії крила під навантаженням.

Нехай функція $y(z)$ визначає цю форму. Очевидно, що довільна функція $y(z)$ може бути наведена у вигляді

$$y(z) = \frac{y(z) + y(-z)}{2} + \frac{y(z) - y(-z)}{2} = y_c(z) + y_{kc}(z), \quad (125)$$

де $y_c(z)$ – парна функція, симетрична щодо осі y ; $y_{kc}(z)$ – непарна функція, що має симетрію відносно початку координат. Назвемо її кососиметричною.

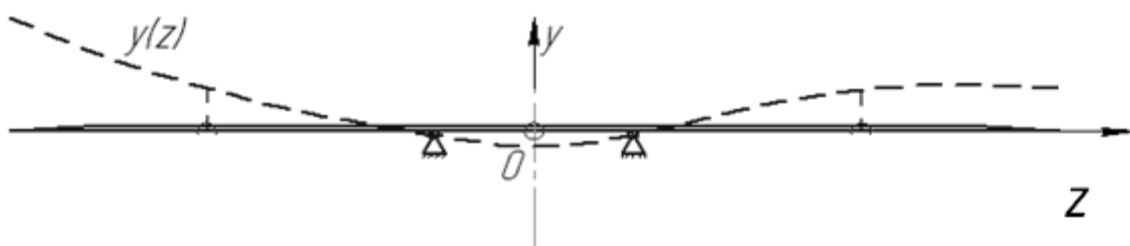


Рис. 68. Форма пружної лінії крила

Таким чином, довільна функція $y(z)$ може бути наведена у вигляді суми симетричної $y_c(z)$ і кососиметричної $y_{kc}(z)$ функцій.

Це дозволяє зменшити розмірність системи (кількість її степенів вільності) при визначенні форм і частот власних коливань, окремо розглядаючи симетричні і кососиметричні форми коливань конструкції.

Наведемо приклад розрахунку власних коливань крила з трьома зосередженими масами $m_1=m_2=m_3=m$, вважаючи, що згинальна жорсткість крила постійна (рис. 69). Масою крила нехтуємо.

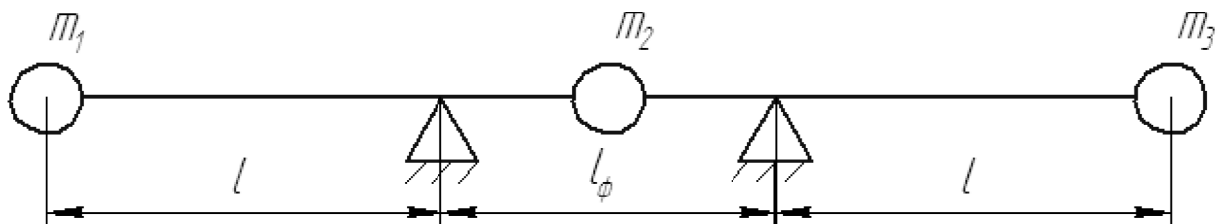


Рис. 69. Схема крила з трьома масами

Крило, закріплене до фюзеляжу в двох точках, здійснює згинальні коливання. Оскільки система симетрична, то проаналізуємо окремо симетричні і кососиметричні форми її коливань.

При симетричних коливаннях (рис. 70) амплітудні зміщення лівої та правої мас однакові і дорівнюють A_1 . Складемо рівняння динамічної рівноваги системи в положенні амплітудних відхилень (у зворотній формі):

$$A_1 = m\omega_c^2 A_1 \delta_{11} + m\omega_c^2 A_2 \delta_{12} + m\omega_c^2 A_1 \delta_{13},$$

$$A_2 = m\omega_c^2 A_1 \delta_{21} + m\omega_c^2 A_2 \delta_{22} + m\omega_c^2 A_1 \delta_{23}.$$

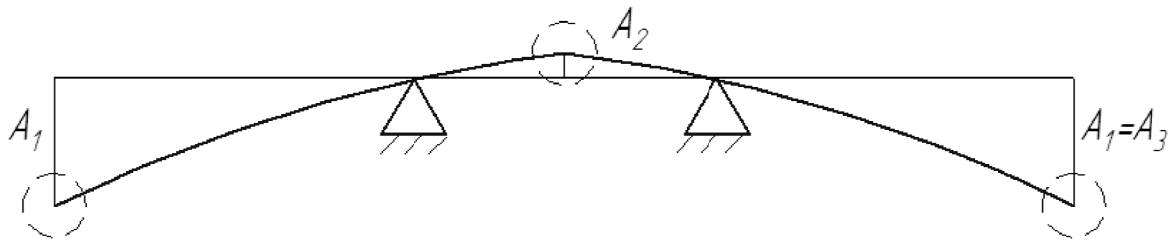


Рис. 70. Симетричні коливання крила

Оскільки $A_3=A_1$, то третє рівняння, що визначає переміщення маси m_3 , буде наслідком першого, його не розглядаємо.

Для отримання коефіцієнтів впливу проаналізуємо два стани, відповідні одиничним навантаженням у точках 1 і 2 (рис. 71).

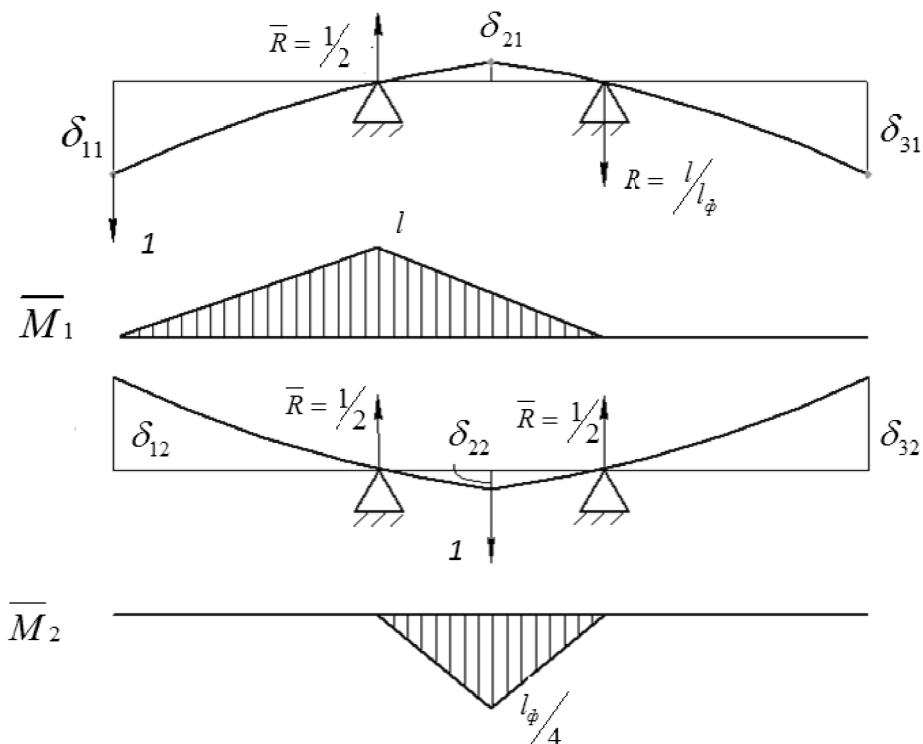


Рис. 71. Визначення коефіцієнтів впливу

Визначимо коефіцієнти впливу за правилом Верещагіна:

$$\delta_{11} = \delta_{33} = \frac{l^2}{3EI}(l + l_\phi); \quad \delta_{12} = \delta_{23} = -\frac{l_\phi^2 l}{16EI}; \quad \delta_{13} = \frac{l^2 l_\phi}{6EI}; \quad \delta_{22} = \frac{l_\phi^3}{48EI}$$

Якщо рівняння записати у вигляді

$$\begin{aligned} (m\omega_c^2 \delta_{11} + m\omega_c^2 \delta_{13} - 1)A_1 + m\omega_c^2 \delta_{12}A_2 &= 0; \\ (m\omega_c^2 \delta_{21} + m\omega_c^2 \delta_{23})A_1 + (m\omega_c^2 \delta_{22} - 1)A_2 &= 0, \end{aligned}$$

то дві частоти власних коливань знайдемо з виразу

$$\det \begin{bmatrix} m\omega_c^2 \delta_{11} + m\omega_c^2 \delta_{13} - 1 & m\omega_c^2 \delta_{12} \\ m\omega_c^2 \delta_{21} + m\omega_c^2 \delta_{23} & m\omega_c^2 \delta_{22} - 1 \end{bmatrix} = 0,$$

а співвідношення амплітуд A_1 і A_2 (форми власних коливань) – з першого рівняння системи

$$\frac{A_{2k}}{A_{1k}} = -\frac{m\omega_{ck}^2 \delta_{11} + m\omega_{ck}^2 \delta_{13} - 1}{m\omega_{ck}^2 \delta_{12}}, \quad k = 1, 2,$$

де ω_{ck}^2 – частоти симетричних власних коливань.

Кососиметрична форма коливань показана на рис. 72. У цьому випадку середня маса нерухома, тому отримуємо тільки одне рівняння

$$A_1 = m\omega_c^2 A_1 \delta_{11} - m\omega_c^2 A_1 \delta_{13}$$

або

$$(m\omega_c^2 \delta_{11} + m\omega_c^2 \delta_{13} - 1)A_1 = 0.$$

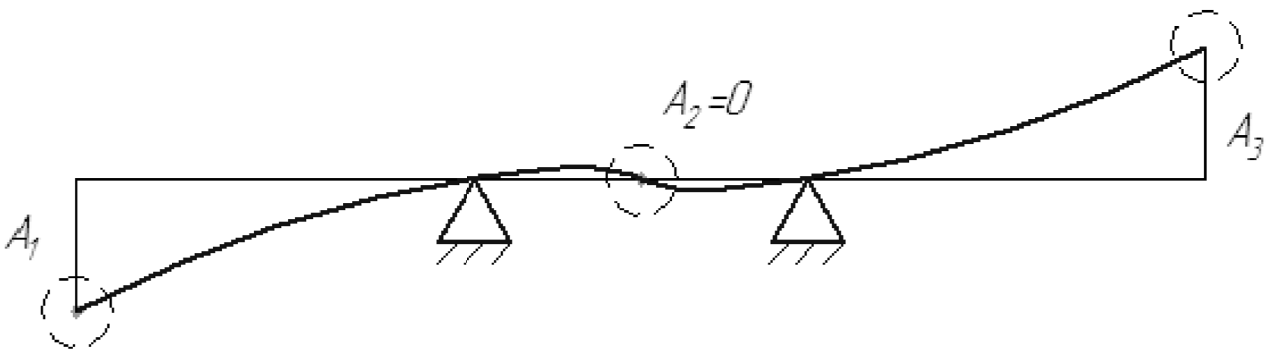


Рис. 72. Кососиметрична форма коливань

Оскільки амплітуда $A_1 \neq 0$, то необхідно, щоб

$$m\omega_c^2 \delta_{11} + m\omega_c^2 \delta_{13} - 1 = 0.$$

З даного частотного рівняння визначають частоту кососиметричних форм коливань

$$\omega_c^2 = \frac{1}{m(\delta_{11} - \delta_{13})}$$

Очевидно, що $\delta_{11} > \delta_{13}$.

Маючи в своєму розпорядженні частоти в порядку зростання, можна отримати відповідні форми.

Якщо цю задачу потрібно було б вирішити, не виділяючи симетричні і кососиметричні форми коливань, то слід було б вирішувати кубічне рівняння частот.

Вільні згинальні коливання однорідного крила

Крило називається однорідним, якщо його масово-інерційні і жорсткісні характеристики однакові за розмахом. Такі крила застосовують на легких літаках, часто з технологічних міркувань.

Як правило, коливання крила завжди є згинально-крутильними, бо центри мас поперечних перерізів крила не лежать на осі жорсткості. Тому згинальні коливання викликають крутильні і навпаки.

З метою спрощення аналізу коливань будемо вважати, що маси (необов'язково зосереджені) розташовані на осі жорсткості. В конструкції крила можуть незалежно виявлятися згинальні та крутильні коливання.

Згинальні коливання пов'язані з інерцією поступального руху маси, а крутильні – з інерцією обертального руху.

Защемлена консоль

Нехай вісь жорсткості недеформованого крила прямолінійна і центри мас і жорсткості у всіх перерізах збігаються, а однойменні головні осі інерції всіх перерізів паралельні один одному, тобто крило є незакрученим (рис. 73).

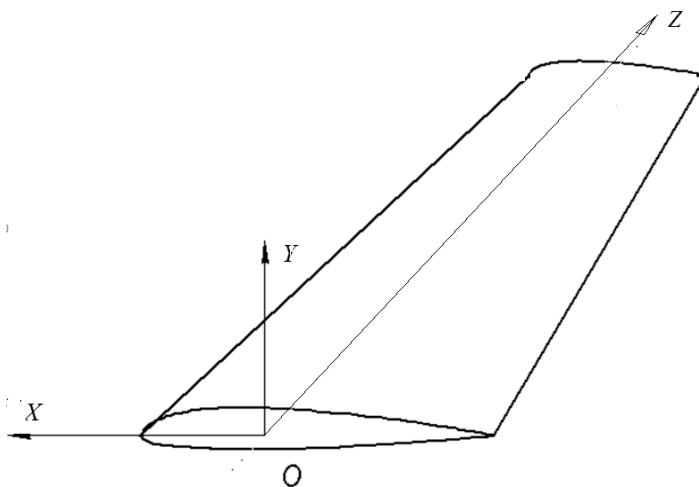


Рис. 73. Незакручене крило

Скористаємося рівнянням вільних згинальних коливань балки як системи з розподіленою масою [2, 6, 7]. Така балка має нескінченне число степенів вільності. Коливання балки відбуваються в площинах Oyz і Oxz [3]:

$$(EI_x y'')'' + m_n \ddot{y} = 0; \quad (126)$$

$$(EI_y x'')'' + m_n \ddot{x} = 0, \quad (127)$$

де y і x - переміщення перерізу крила у напрямку головних осей інерції перерізу;

EI_x і EI_y - згинальні жорсткості балки щодо головних осей інерції перерізів;

m_n - погонна маса крила.

Диференціювання по координаті z показано штрихом:

$$y' = \frac{dy}{dz},$$

а диференціювання за часом - точкою:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$

Рівняння потрібно розглядати спільно з такими граничними умовами для вільного кінця крила:

$$M_x(z=l_k) = 0; \quad Q_x(z=l_k) = 0;$$

$$M_y(z=l_k) = 0; \quad Q_y(z=l_k) = 0.$$

Аналізуючи граничні умови в защемленні крила, вважаємо, що переміщення перерізу і його поворот відсутні:

$$y(z=0) = 0; \quad y'(z=0) = 0;$$

$$x(z=0) = 0; \quad x'(z=0) = 0.$$

Надалі будемо розглядати тільки одне рівняння коливань у площині Oyz . Вважаємо, що форма коливань обох консолей крила однакова, тобто є так звані симетричні форми коливань.

Рішення рівнянь (126) знаходимо у вигляді

$$y(z,t) = q(t)\varphi(z), \quad (128)$$

де $\varphi(z)$ - функція координати, а $q(t)$ - функція часу.

Тоді одночасно виконуються залежності

$$(EI_x \varphi)'' - \omega_c^2 m_n \varphi = 0, \quad (129)$$

$$\ddot{q} + \omega_c^2 q = 0, \quad (130)$$

де ω_c – частота власних коливань. З рівняння (129) випливає, що функція $\varphi(z)$ визначає розподіл амплітуд коливань по довжині крила. Лінійне диференціальне рівняння другого порядку (130) має рішення

$$q(t) = M \cos(\omega_c t) + N \sin(\omega_c t), \quad (131)$$

де M, N – сталі, які визначають із початкових умов. Видно, що вільні коливання балки відбуваються за гармонічним законом.

Для крила з постійною за розмахом жорсткістю і погонною масою рівняння (129) набуває вигляду

$$\varphi^{IV} - \alpha^4 \varphi = 0, \quad (132)$$

$$\text{де } \alpha^4 = \frac{\omega_c^2 m_n}{EI_x}.$$

Загальне рішення рівняння (132)

$$\varphi(z) = Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z} + Ce^{i\alpha z} + De^{-i\alpha z}, \quad (133)$$

де i – уявна одиниця, а A, B, C, D – невідомо константи. Скористаємося функціями Крилова, що дозволяють істотно спростити виконання граничних умов [4]:

$$\begin{aligned} K_1(\alpha z) &= \frac{1}{2}(ch(\alpha z) + \cos(\alpha z)); \\ K_2(\alpha z) &= \frac{1}{2}(sh(\alpha z) + \sin(\alpha z)); \\ K_3(\alpha z) &= \frac{1}{2}(ch(\alpha z) - \cos(\alpha z)); \\ K_4(\alpha z) &= \frac{1}{2}(sh(\alpha z) - \sin(\alpha z)). \end{aligned} \quad (134)$$

Тоді рівняння (133) має вигляд

$$\varphi(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z). \quad (135)$$

Постійні C_1, C_2, C_3 і C_4 пов'язані умовами [2]

$$C_1 = \varphi(0); \quad C_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)_{z=0}; \quad C_3 = \frac{1}{EI\alpha^2} M_{x \ z=0} \quad \text{і} \quad C_4 = \frac{1}{EI\alpha^3} Q_{y \ z=0}.$$

Запишемо граничні умови для консольної балки:

– у місці защемлення крила відсутні переміщення

$$\varphi(0) = 0; \quad (136)$$

– у місці защемлення крила відсутній поворот крила

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=0} = 0; \quad (137)$$

– на кінці крила немає згинального моменту

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)_{z=l_k} = 0; \quad (138)$$

– на кінці крила немає поперечної сили

$$\left(\frac{d^3\varphi}{dz^3}\right)_{z=l_k} = 0. \quad (139)$$

При $z = 0$ одержуємо, що $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, а граничні умови при $z = l_k$ приводять до рівнянь

$$C_3 K_1(\lambda) + C_4 K_2(\lambda) = 0,$$

$$C_3 K_4(\lambda) + C_4 K_1(\lambda) = 0,$$

де $\lambda = \alpha l_k$.

Однорідні рівняння відносно невідомих C_1, C_2, C_3 і C_4 мають нетривіальне рішення тільки в тому випадку, якщо визначник матриці, побудованої з коефіцієнтів при невідомих, дорівнює нулю. Ця умова приводить до частотного рівняння

$$K_1^2(\lambda) - K_2(\lambda)K_4(\lambda) = 0,$$

яке можна привести до виду

$$\cos \lambda = -1/\operatorname{ch} \lambda.$$

Графічне рішення рівняння показано на рис. 74. Графічна інтерпретація вказує на нескінченне число точок перетину кривих. Корні рівняння

$$\lambda_1 = 1,875; \quad \lambda_2 = 4,694; \quad \lambda_k = \frac{2k-1}{2}\pi \quad \text{при } k > 2.$$

Частоти коливань визначають за формулою

$$\omega_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EI_x}{m_{\Pi} l_k^4}}, \quad (140)$$

а форма коливань –

$$\varphi_k(z) = K_2(\lambda_k)K_3\left(\frac{\lambda_k z}{k}\right) - K_1(\lambda_k)K_4\left(\frac{\lambda_k z}{l_k}\right). \quad (141)$$

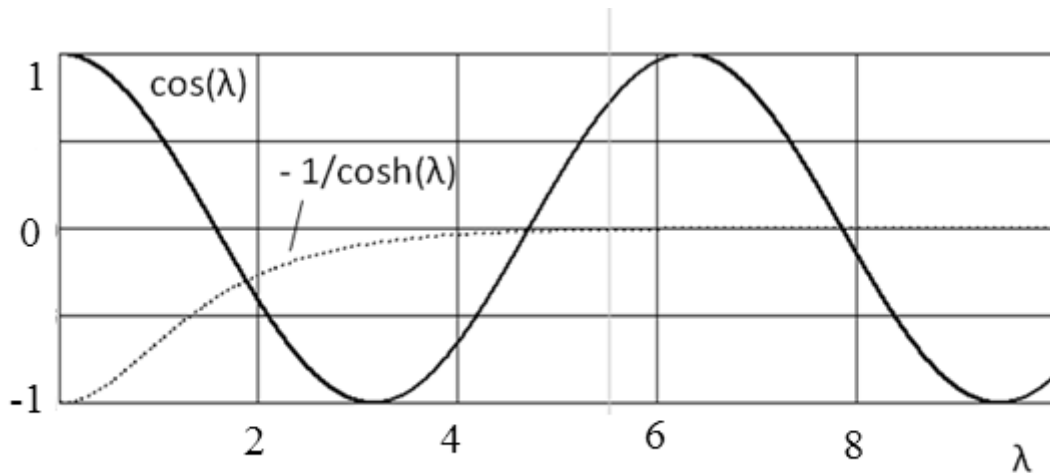


Рис. 74. Визначення коренів частотного рівняння

Згинальні коливання вільного ЛА з однорідним крилом

Розглянемо вільний ЛА. Нехай до жорсткого фюзеляжу прикріплено пряме крило. Нехай маса фюзеляжу – $2M_\phi$, а крило має сталу за розмахом жорсткість і погонну масу (рис. 75). Для легкого ЛА можна з певними обмеженнями застосувати припущення, що всі маси ЛА розташовані в одній площині - Oyz .

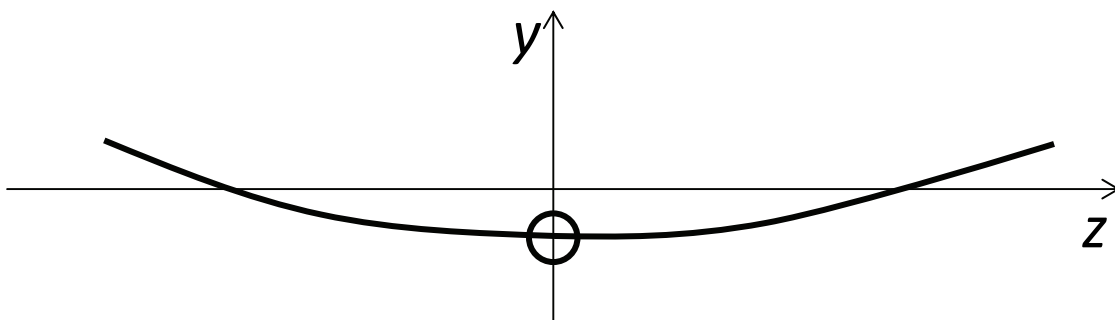


Рис. 75. Згинальні коливання вільного ЛА

Визначимо вільні коливання даної системи. У процесі вільних коливань центр мас ЛА не переміщується, оскільки деформування літака відбувається під дією внутрішніх сил. Не можуть відбуватися і повороти всього ЛА як твердого тіла.

Літак вважаємо симетричним, тому нехай відбуваються симетричні згинальні коливання крил. Очевидно, що фюзеляж бере участь у

коливаннях разом із крилом. Тому частоти і форми вільних згинальних коливань системи відрізняються від частот і форм коливань защемленого крила.

Рівняння (132) наведемо у вигляді

$$\varphi^{IV} - \frac{\omega_c^2}{a^2} \varphi = 0,$$

де $a^2 = \frac{EI}{m_n}$.

Рішення запишемо так:

$$\varphi(z) = Csh\left(\sqrt{\omega_c/a} z\right) + Dch\left(\sqrt{\omega_c/a} z\right) + E\sin\left(\sqrt{\omega_c/a} z\right) + F\cos\left(\sqrt{\omega_c/a} z\right).$$

В силу прийнятої симетрії деформації розглянемо тільки праву половину системи. Введемо безрозмірну змінну $\xi = z/l_k$, тоді

$$\varphi(\xi) = Csh(kl_k\xi) + Dch(kl_k\xi) + E\sin(kl_k\xi) + F\cos(kl_k\xi),$$

де $k^4 = \frac{m_n \omega_c^2}{EI}$.

Граничні умови мають вигляд:

– у місці защемлення крила відсутній поворот крила:

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=0} = 0;$$

– на кінці крила немає згинального моменту:

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)_{z=l_k} = 0;$$

– на кінці крила немає поперечної сили:

$$\left(\frac{d^3\varphi}{dz^3}\right)_{z=l_k} = 0.$$

Зупинимось докладніше ще на одній невизначеній граничній умові при $z = 0$.

Очевидно, що в місці защемлення крила переміщення не дорівнюють нулю. Необхідно сформулювати додаткову фізичну умову, яка виконується в місці закріплення крила.

Фюзеляж у процесі коливань рухається прискорено, тому в кожен момент часу на крило діє сила інерції

$$F_{\text{и}} = 2M_{\phi}\ddot{y}(0, t),$$

спрямована протилежно прискоренню маси фюзеляжу.

Поперечна сила для правої половини крила у будь-який момент часу при $z = 0$

$$Q_y = M_{\phi}\ddot{y}(0, t).$$

Тоді, враховуючи, що

$$Q_y = y'''(z, t)EI,$$

одержуємо

$$M_{\phi}\ddot{y}(0, t) = y'''(0, t)EI$$

або

$$\varphi'''(z = 0) = \frac{M_{\phi}}{m_{\pi}} k^4 \varphi(z = 0).$$

Використовуючи безрозмірну змінну $\xi = z/l_k$, що змінюється від нуля до одиниці, знаходимо

$$\frac{1}{l_k} \varphi'''(\xi = 0) = \frac{M_{\phi}}{m_{\pi}} k^4 \varphi(\xi = 0).$$

Результати точного рішення для симетричних форм для легкого ЛА [6] показані на рис. 76. Як видно, фюзеляж у процесі вільних коливань переміщується у вертикальній площині.

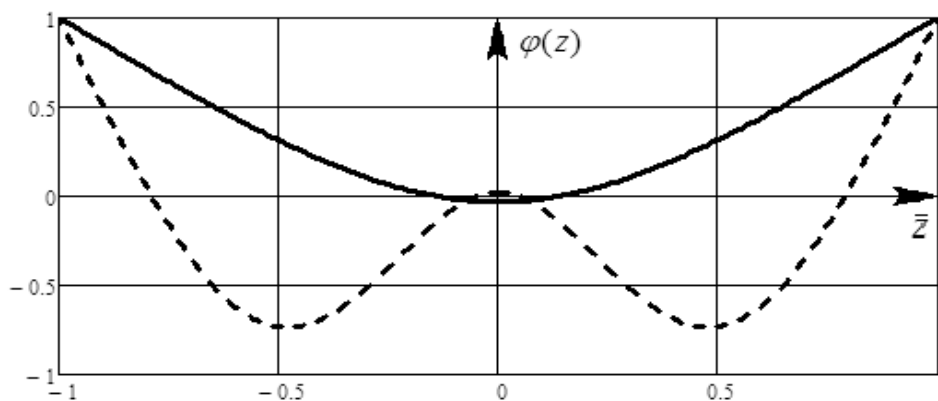


Рис. 76. Перші дві симетричні форми коливань

Граничні умови для кососиметричних форм відрізняються від симетричних, тому запишемо граничні умови для кососиметричних форм:

- на кінці крила немає згинального моменту:

$$\left(\frac{d^2 y}{dz^2} \right)_{z=l_k} = 0;$$

- на кінці крила немає поперечної сили:

$$\left(\frac{d^3 y}{dz^3}\right)_{z=l_k} = 0;$$

- у місці защемлення крила відсутні зміщення і згинальний момент:

$$y(z)_{z=0} = y(0) = 0; \quad \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=0} = 0.$$

Результати точного рішення для кососиметричних форм показані на рис. 77.

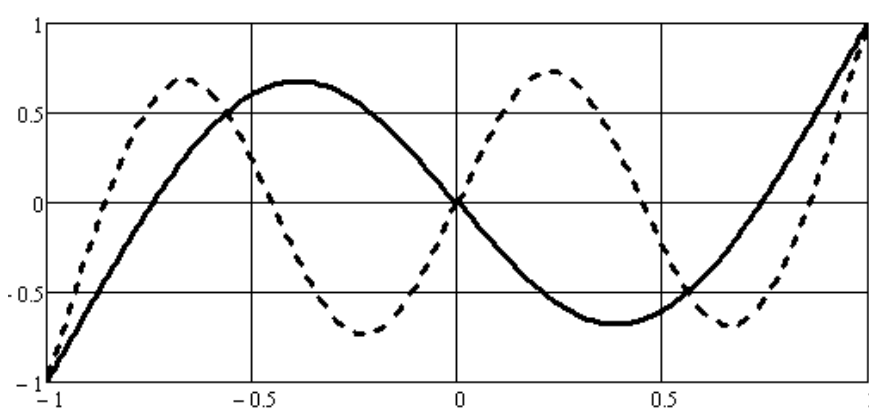


Рис. 77. Перші дві кососиметричні форми коливань

Слід зазначити, що рівняння (126) має рішення з двома нульовими частотами коливань. При цих частотах літальний апарат у просторі рухається, як тверде тіло, – здійснює паралельне переміщення уздовж вертикальної осі та поворот навколо поздовжньої осі фюзеляжу.

Власні коливання вільного ЛА з неоднорідним крилом

Розглянемо коливання вільного ЛА з неоднорідним крилом, закріпленим до фюзеляжу. Скористаємося методом дискретизації. На крилі розташовано n дискретних мас $m_i, i = 1, 2, \dots, n$. Фюзеляж має масу m_0 і момент інерції I_0 . Невідомими в задачі є вертикальні переміщення мас на крилі, а також лінійне y_0 і кутове φ_0 переміщення фюзеляжу.

Таким чином, система має $2n$ степенів вільності. Сили і моменти сил інерції дискретних елементів і фюзеляжу у процесі вільних коливань ЛА мають задовольняти вимогу самоврівноваженості сил і моментів, оскільки відсутнє зовнішнє навантаження.

Центр мас літака не переміщується, тоді головний вектор сил інерції дорівнює нулю:

$$-m_0\ddot{y}_0 + (-m_1\ddot{y}_1) + (-m_2\ddot{y}_2) + \dots + (-m_n\ddot{y}_n) + (-m_{n+1}\ddot{y}_{n+1}) + (-m_{n+2}\ddot{y}_{n+2}) + \dots + (-m_{n+n}\ddot{y}_{n+n}) = 0.$$

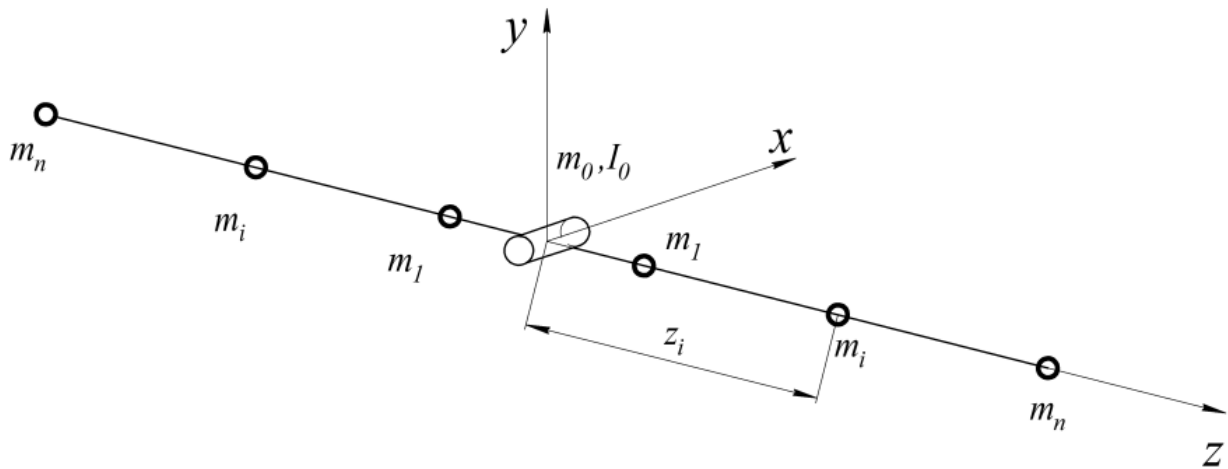


Рис. 78. Розрахункова модель вільного літака

Відсутні моменти зовнішніх сил, тому

$$-I_0\ddot{\varphi}_0 + (-m_1\ddot{y}_1)z_1 + (-m_2\ddot{y}_2)z_2 + \dots + (-m_n\ddot{y}_n)z_n + (m_{n+1}\ddot{y}_{n+1})z_{n+1} + (m_{n+2}\ddot{y}_{n+2})z_{n+2} + \dots + (m_{n+n}\ddot{y}_{n+n})z_{n+n} = 0.$$

Крім того, записуємо рівняння для пружних деформацій крила. Переміщення зосереджених мас на крилі мають задовольнити вимоги

$$y_1 - (y_0 + z_1\varphi_0) = (-m_1\ddot{y}_1)\delta_{11} + (-m_2\ddot{y}_2)\delta_{12} + \dots + (-m_n\ddot{y}_n)\delta_{1n};$$

$$y_2 - (y_0 + z_2\varphi_0) = (-m_1\ddot{y}_1)\delta_{21} + (-m_2\ddot{y}_2)\delta_{22} + \dots + (-m_n\ddot{y}_n)\delta_{2n};$$

.....

$$y_n - (y_0 + z_n\varphi_0) =$$

$$(-m_1\ddot{y}_1)\delta_{n1} + (-m_2\ddot{y}_2)\delta_{n2} + \dots + (-m_n\ddot{y}_n)\delta_{nn};$$

$$y_{n+1} - (y_0 + z_{n+1}\varphi_0) =$$

$$(-m_{n+1}\ddot{y}_{n+1})\delta_{n+1,n+1} + (-m_{n+2}\ddot{y}_{n+2})\delta_{n+1,n+2} + \dots + (-m_{n+n}\ddot{y}_{n+n})\delta_{n+1,n+n};$$

$$y_{n+2} - (y_0 + z_{n+2}\varphi_0) =$$

$$(-m_{n+1}\ddot{y}_{n+1})\delta_{n+2,n+1} + (-m_{n+2}\ddot{y}_{n+2})\delta_{n+2,n+2} + \dots + (-m_{n+n}\ddot{y}_{n+n})\delta_{n+2,n+n};$$

.....

$$y_{n+n} - (y_0 + z_{n+n}\varphi_0) = (-m_{n+1}\ddot{y}_{n+1})\delta_{n+n,n+1} + (-m_{n+2}\ddot{y}_{n+2})\delta_{n+n,n+2} + \dots + (-m_{n+n}\ddot{y}_{n+n})\delta_{n+n,n+n}.$$

Ліву частину рівнянь системи у матричному вигляді можна навести так:

$$Y \cdot A = \begin{pmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_{n+n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -z_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -z_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -z_n & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -z_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -z_{n+2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -1 & -z_{n+n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де Y – вектор-стовпець невідомих, а квадратна матриця A залежить від координат мас на крилі.

Права частина має вигляд:

$$\ddot{Y} \cdot B = (\ddot{y}_0, \ddot{\varphi}_0, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_n, \ddot{y}_{n+1}, \ddot{y}_{n+1}, \ddot{y}_{n+2}, \dots, \ddot{y}_{n+n})^T \cdot$$

$$\begin{pmatrix} -m_0 & 0 & -m_1 & -m_2 & \dots & -m_n & m_{n+1} & m_{n+2} & \dots & m_{n+n} \\ 0 & -I_0 & -m_1 z_1 & -m_1 z_1 & \dots & -m_n z_n & -m_{n+1} z_{n+1} & -m_{n+2} z_{n+2} & \dots & -m_{n+n} z_{n+n} \\ 0 & 0 & -m_1 \delta_{11} & -m_2 \delta_{12} & \dots & -m_n \delta_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -m_1 \delta_{21} & -m_2 \delta_{22} & \dots & -m_n \delta_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -m_1 \delta_{n1} & -m_2 \delta_{n2} & \dots & -m_n \delta_{nn} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -m_1 \delta_{n+1,n+1} & -m_2 \delta_{n+1,n+2} & \dots & -m_n \delta_{n+1,n+n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -m_1 \delta_{n+2,n+1} & -m_2 \delta_{n+2,n+1} & \dots & -m_n \delta_{n+2,n+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді виконується таке матричне рівняння:

$$A \cdot Y = B \cdot \ddot{Y}.$$

З урахуванням гармонічного руху з частотою ω_c

$$A \cdot Y = B \cdot (-\omega_c^2) \cdot Y.$$

Помноживши на обернену матрицю B

$$B^{-1} A \cdot Y = (-\omega^2) \cdot Y,$$

одержимо для вектора-стовпця невідомих амплитуд коливань Y_A

$$B^{-1} \cdot A \cdot \{Y_A\} = -\omega^2 \{Y_A\}.$$

Вирішення задачі зводиться до визначення власних значень (частот і форм) матриці $B^{-1} \cdot A$.

Сумісні власні згинально-крутильні коливання крила як механічної системи з двома степенями вільності

Крило ЛА характеризується, як правило, складним розподілом мас і жорсткостей уздовж розмаху. На крилі часто розташовуються великі зосереджені маси. При цьому центр мас перерізів крила не збігається з віссю жорсткості. Актуальним є вивчення динамічних характеристик такого крила – визначення частот і форм власних коливань.

Розглянемо спрощену модель крила, яка має всього два степеня вільності. Це дозволяє краще усвідомити фізичну сторону задачі. Розташування мас на крилі приймемо таким, щоб у системі порушувалися пов'язані згинально-крутильні коливання.

На рис. 79 показано механічну систему, що має два степеня вільності.

Ділянка OB крила маси не має, але характеризується згинальною і крутильною жорсткістю. Вона деформується – згинається в площині найменшої жорсткості Oyz і закручується щодо осі z . Нехай $EI(z)$ і $GI_\rho(z)$ – згинальна і крутильна жорсткості крила відповідно.

У перерізі BC крила знаходиться деяка маса, наприклад, двигун. Ділянку BC , спрямовану вздовж нервюри, вважаємо такою, що не деформується – нервюра в своїй площині має дуже велику жорсткість. У загальному випадку центр мас перерізу крила не збігається із центром жорсткості. На рисунку точка C – центр мас перерізу.

Позначимо через $m_{\partial\partial}$ і $I_{\partial\partial}$ – масу і момент інерції двигуна відносно центру мас. Відстань від центру мас двигуна до осі жорсткості – σ .

Як видно, вертикальне зміщення точки B (центру жорсткості) і поворот перерізу крила – це узагальнені координати, які повністю задають положення перерізу крила (двигуна) і всієї системи. Позитивне правило знаків для координат системи вказано на рисунку.

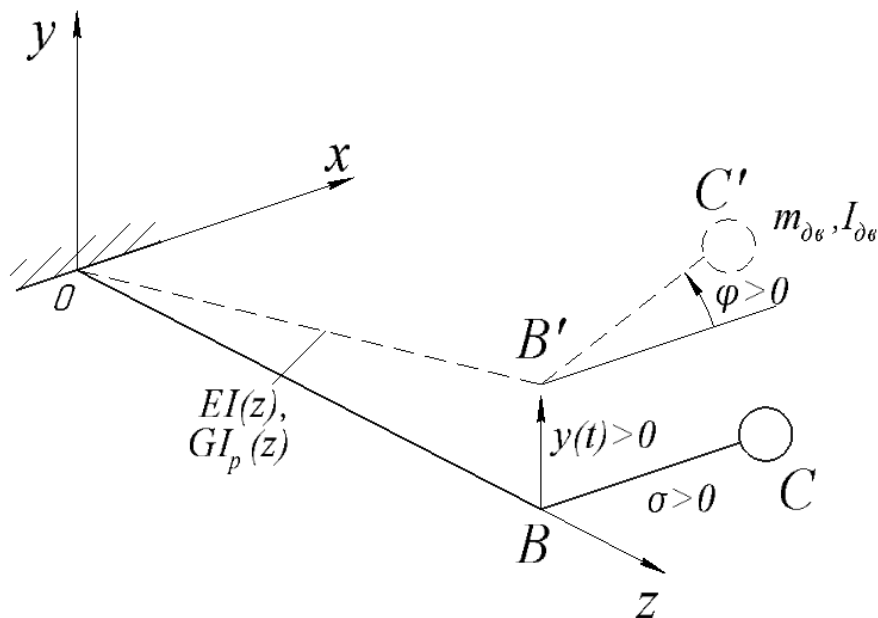


Рис. 79. Сумісні згинально-крутильні коливання

Визначимо власні коливання зазначеної механічної системи. Внаслідок розбіжності центру мас і центру жорсткості коливання крила будуть спільними: згин крила породжує його кручення, і, навпаки, кручення крила викликає згин. Таким чином, система через початкове збурення буде завжди здійснювати пов'язані між собою згинально-крутильні коливання.

Очевидно, що вертикальна координата центру мас у процесі деформації крила з лінійною точністю дорівнює

$$y_c = y + \sigma \varphi,$$

а лінійне прискорення центру мас

$$\ddot{y}_c = \ddot{y} + \sigma \ddot{\varphi},$$

де \ddot{y} – вертикальне прискорення центру жорсткості;

$\ddot{\varphi}$ – кутове прискорення перерізу крила.

Відмітимо, що в перерізі BC розподілені маси відсіку крила замінені еквівалентною масою, розташованою в центрі мас.

Внаслідок прискореного руху мас відсіку крила на конструкцію крила діють розподілені сили інерції, які можуть бути приведені до головного вектора та головного моменту сил інерції.

На рис. 80 показані головний вектор сил інерції F_{in} (розташований в центрі мас) і момент сил інерції M_{in} , що діють на пружну систему з боку мас відсіку.

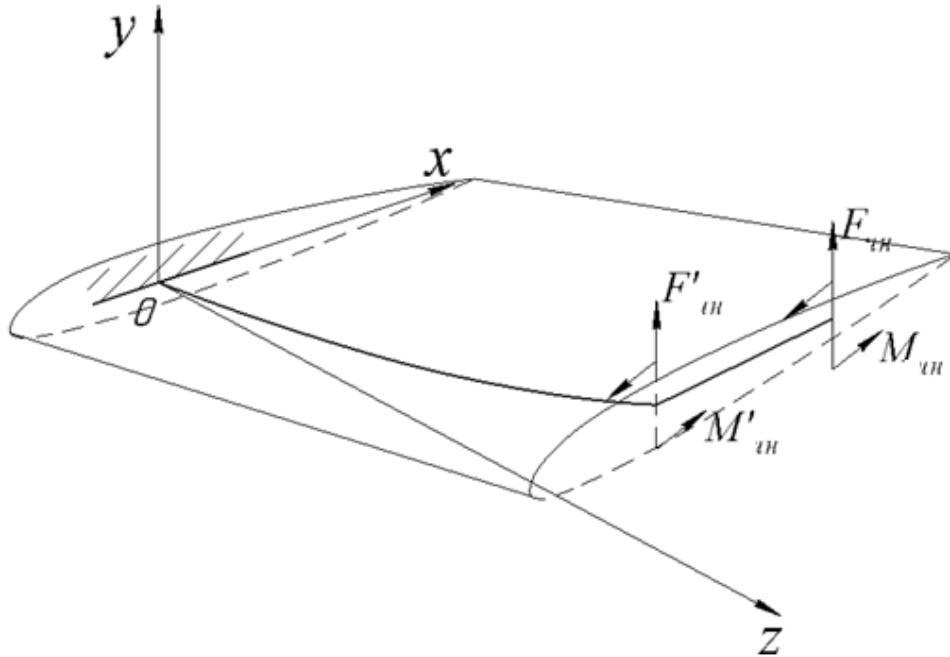


Рис. 80. Дія сил и моментів сил інерції на пружну систему

Очевидно, що

$$F_{in} = (-m_{\partial s} \ddot{y}_c) = [-m_{\partial s} (\ddot{y} + \sigma \ddot{\phi})];$$

$$M_{in} = (-I_{\partial s} \ddot{\phi}).$$

Поперечний переріз крила не деформується, тому сила і момент сил інерції можуть бути приведені до осі жорсткості. В силу вимоги щодо статичної еквівалентності дії сили маємо такі сили і момент, що діють у точці B :

$$F'_{in} = F_{in} = [-m_{\partial s} (\ddot{y} + \sigma \ddot{\phi})];$$

$$M'_{in} = (-I_{\partial s} \ddot{\phi}) + [-m_{\partial s} (\ddot{y} + \sigma \ddot{\phi})] \sigma = (-I_{\partial s} \ddot{\phi}) - m_{\partial s} (\ddot{y} + \sigma \ddot{\phi}) \sigma .$$

При переносі сили в точку B враховано додатковий момент сили $[-m_{\partial s} (\ddot{y} + \sigma \ddot{\phi})] \sigma$.

Сила F'_{in} і момент M'_{in} деформують невагому балку OB крила. В силу лінійності системи лінійні $y(t)$ і кутові $\varphi(t)$ переміщення системи в точці B у довільний момент часу дорівнюють

$$y = \delta_{11} F'_{in} = \delta_{11} [-m_{\partial\delta} (\ddot{y} + \sigma \ddot{\varphi})];$$

$$\varphi = \delta_{22} M'_{in} = \delta_{22} [(-I_{\partial\delta} \ddot{\varphi}) - m_{\partial\delta} (\ddot{y} + \sigma \ddot{\varphi}) \sigma],$$

де δ_{11} і δ_{22} – коефіцієнти піддатливості, які визначаються згідно з інтегралом Мора (рис. 81)

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_{3z}(z)^2 dz}{EI(z)};$$

$$\delta_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_{kp}(z)^2 dz}{GI_{\rho}(z)},$$

де $\bar{M}_{3z}(z)$ і $\bar{M}_{kp}(z)$ – згинальний і крутильний моменти в перерізах крила від одиничних сил і моментів, прикладених у точці B ,

$$\bar{M}_{3z}(z) = (z_{\partial\delta} - z) \cdot 1,$$

$$\bar{M}_{kp}(z) = 1.$$

Згідно з теоремою про взаємність переміщень

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0,$$

тобто сила і момент, що прикладені до осі жорсткості, не викликають відповідно крутіння перерізу і вигину крила.

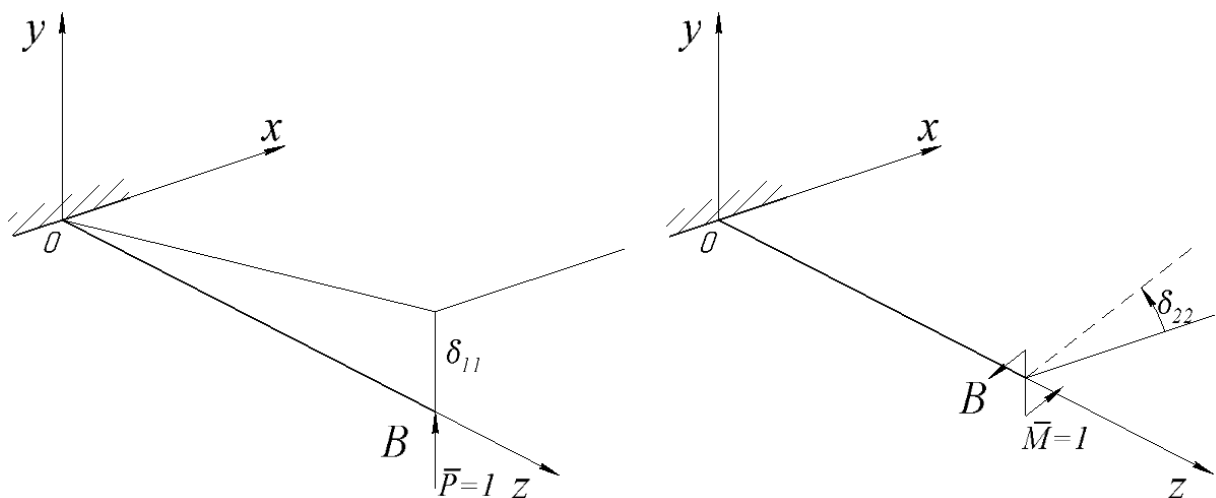


Рис. 81. Визначення коефіцієнтів піддатливості

Як видно, система диференціальних рівнянь, що описує рух системи, є зв'язаною. Це підтверджує, що згинальні і крутильні коливання системи відбуваються одночасно і впливають одне на одне.

Спростимо систему рівнянь

$$\begin{aligned}(\delta_{11} m_{\delta\sigma}) \ddot{y} + (\delta_{11} m_{\delta\sigma} \sigma) \ddot{\varphi} &= -y, \\ (\delta_{22} m_{\delta\sigma} \sigma) \ddot{y} + (\delta_{22} I_{\delta\sigma} + \delta_{22} m_{\delta\sigma} \sigma^2) \ddot{\varphi} &= -\varphi.\end{aligned}$$

При вільних коливаннях рух системи відбувається за гармонічним законом

$$y = A_1 \sin(\omega_c t + \varepsilon); \quad \varphi = A_2 \sin(\omega_c t + \varepsilon),$$

де A_1 і A_2 – амплітудні значення деформації згину і кручення: вертикальне (поступальне) переміщення і кут повороту відсіку крила;

ω_c – частота власних коливань;

ε – початкова фаза.

Тоді прискорення для узагальнених координат

$$\ddot{y} = -A_1 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \varepsilon); \quad \ddot{\varphi} = -A_2 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \varepsilon).$$

Після підстановки невідомих функцій $y(t)$, $\varphi(t)$, $\ddot{y}(t)$ і $\ddot{\varphi}(t)$ у систему отримаємо

$$\begin{aligned}[-\delta_{11} m_{\delta\sigma} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \varepsilon)] A_1 - [\delta_{11} m_{\delta\sigma} \sigma \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \varepsilon)] A_2 &= \\ = -A_1 \sin(\omega_c t + \varepsilon); \\ [-\delta_{22} m_{\delta\sigma} \sigma \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \varepsilon)] A_1 + [\delta_{22} I_{\delta\sigma} + \delta_{22} m_{\delta\sigma} \sigma^2] (-\omega_c^2) \sin(\omega_c t + \varepsilon) A_2 &= \\ = -A_2 \sin(\omega_c t + \varepsilon)\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}(1 - \delta_{11} m_{\delta\sigma} \omega_c^2) A_1 - (\delta_{11} m_{\delta\sigma} \sigma \omega_c^2) A_2 &= 0; \\ (-\delta_{22} m_{\delta\sigma} \sigma \omega_c^2) A_1 + [1 - \delta_{22} \omega_c^2 (I_{\delta\sigma} + m_{\delta\sigma} \sigma^2)] A_2 &= 0.\end{aligned}\tag{142}$$

В однорідній системі лінійних рівнянь невідомі амплітуди A_1 і A_2 , які одночасно не дорівнюють нулю, якщо дорівнює нулю визначник, складений з коефіцієнтів системи (142):

$$\begin{vmatrix} (1 - \delta_{11} m_{\delta\sigma} \omega_c^2) & (\delta_{11} m_{\delta\sigma} \sigma \omega_c^2) \\ (-\delta_{22} m_{\delta\sigma} \sigma \omega_c^2) & [1 - \delta_{22} \omega_c^2 (I_{\delta\sigma} + m_{\delta\sigma} \sigma^2)] \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи його, отримуємо частотне рівняння четвертого ступеня відносно ω_c^2

$$f(\omega_c^2) = 0,$$

з якого визначають дві власні частоти ω_{ci} , $i = 1, 2$. Із першого рівняння системи (142) можна отримати відношення між амплітудами коливань A_{1i} і A_{2i} для частоти власних коливань ω_{ci} :

$$\left(1 - \delta_{11} m_{\partial\delta} \omega_{ci}^2\right) A_{1i} - \left(\delta_{11} m_{\partial\delta} \sigma \omega_{ci}^2\right) A_{2i} = 0.$$

Для $i = 1$ отримуємо при нормованій амплітуді вигину $A_{11} = 1$ для амплітуди кручення крила

$$A_{21} = \frac{\left(1 - \delta_{11} m_{\partial\delta} \omega_{c1}^2\right)}{\delta_{11} m_{\partial\delta} \sigma \omega_{c1}^2},$$

тобто форму коливань за першою частотою.

Аналогічно для $i = 2$ при нормованій амплітуді вигину $A_{22} = 1$ для форми коливань за другою частотою

$$A_{12} = \frac{\delta_{11} m_{\partial\delta} \sigma \omega_{c2}^2}{\left(1 - \delta_{11} m_{\partial\delta} \omega_{c2}^2\right)}.$$

Таким чином, частоті ω_{c1} відповідають гармонічні коливання, при яких

$$y_{\max} = A_{11}; \varphi_{\max} = A_{21}.$$

Частоті ω_{c2} відповідають гармонічні коливання, при яких

$$y_{\max} = A_{12}; \varphi_{\max} = A_{22}.$$

Запишемо рівняння (142), використовуючи матричні позначення. Введемо матриці

$$A = \begin{Bmatrix} y \\ \phi \end{Bmatrix}; \ddot{A} = \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix}; \delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 \\ 0 & \delta_{22} \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} m_{\partial\delta} & m_{\partial\delta} \sigma \\ m_{\partial\delta} \sigma & (I_{\partial\delta} + m_{\partial\delta} \sigma^2) \end{bmatrix},$$

де A – вектор-стовпець узагальнених переміщень;

\ddot{A} – вектор-стовпець узагальнених прискорень;

δ – матриця піддатливості системи;

M – матриця мас.

Відзначимо, що матриця маси не діагональна.

Перемноживши матриці δ і M , отримаємо квадратну матрицю B :

$$B = \delta M = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 \\ 0 & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{\delta\epsilon} & m_{\delta\epsilon}\sigma \\ m_{\delta\epsilon}\sigma & (I_{\delta\epsilon} + m_{\delta\epsilon}\sigma^2) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \delta_{11}m_{\delta\epsilon} & \delta_{11}m_{\delta\epsilon}\sigma \\ \delta_{22}m_{\delta\epsilon}\sigma & \delta_{22}(I_{\delta\epsilon} + m_{\delta\epsilon}\sigma^2) \end{bmatrix}.$$

З (142) випливає, що

$$B \ddot{A} = -A.$$

З урахуванням гармонічного руху системи отримаємо

$$\ddot{A} = \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} = -\omega_c^2 \sin(\omega_c t + \epsilon) \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix},$$

$$A = \begin{Bmatrix} y \\ \phi \end{Bmatrix} = \sin(\omega_c t + \epsilon) \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix},$$

$$\left[-\omega_c^2 \sin(\omega_c t + \epsilon) \right] B \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = -\sin(\omega_c t + \epsilon) \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}$$

або

$$B \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega_c^2} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}.$$

З лінійної алгебри відомо, що якщо для матриці B після множення на вектор-стовпець A виконується співвідношення

$$BA = \lambda A,$$

то λ – це власне значення для матриці B .

Тоді

$$\lambda = \frac{1}{\omega_c^2},$$

а частота власних коливань

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$$

На основі отриманих співвідношень можна встановити важливі закономірності зв'язаних згинально-крутильних коливань.

Зв'язані згинально-крутильні коливання крила як системи з декількома степенями вільності

Скористаємося методом дискретизації. Уявімо крило у вигляді сукупності n відсіків, кожен з яких має свої масу і момент інерції (рис. 82).

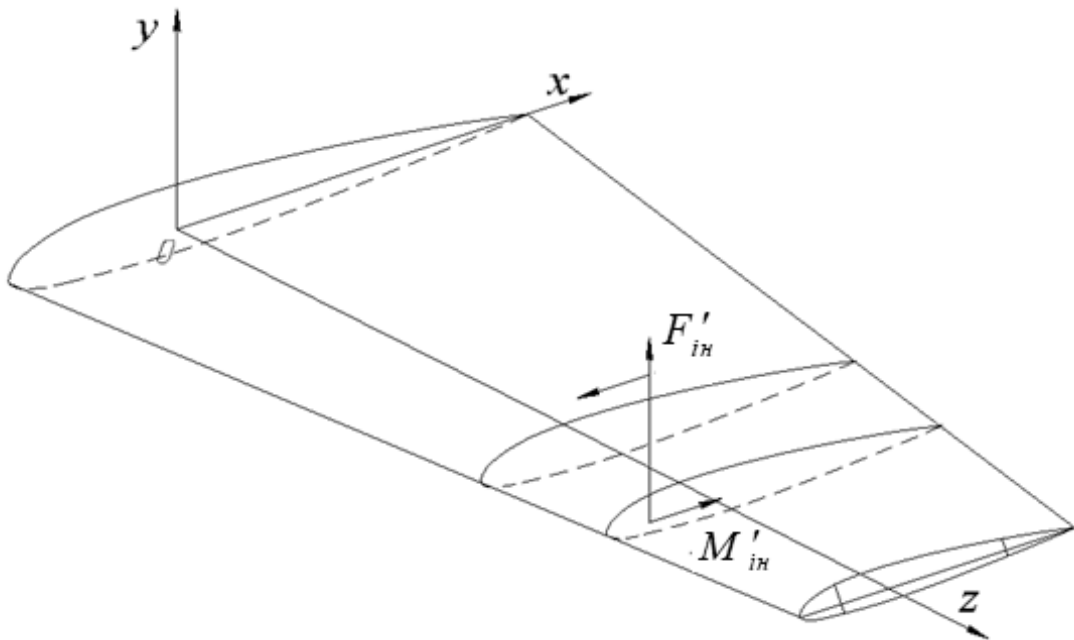


Рис. 82. Дія розподілених сил інерції на відсік

Дія розподілених сил інерції на відсік, як пояснено вище, може бути наведеною у вигляді головного вектора \vec{F}'_{iH} і головного моменту \vec{M}'_{iH} , прикладених до осі жорсткості. Внаслідок цього крило (вісь жорсткості) згинається в площині найменшої жорсткості Oyz і закручується.

На рис. 83 показано крило як механічну систему, що має $2n$ степенів вільності. У кожному перерізі крила (рис. 84) невідомими є вертикальне переміщення $y_i(t)$ і кут повороту перізу $\varphi_i(t)$, $i = 1, \dots, n$. Кожен із відсіків крила характеризується своєю масою m_i і масовим моментом інерції $I_{\rho i}$. Центр мас відсіку має координату σ_i відносно осі жорсткості.

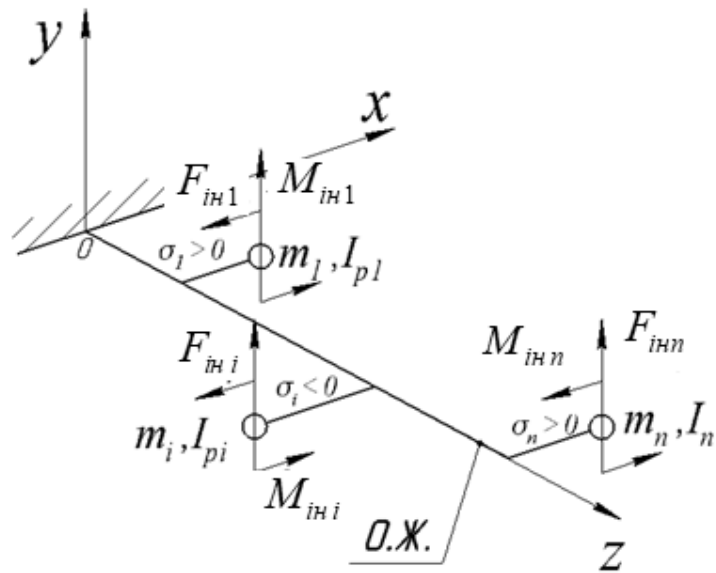


Рис. 83. Сили і моменти сил інерції, що діють на відсіки

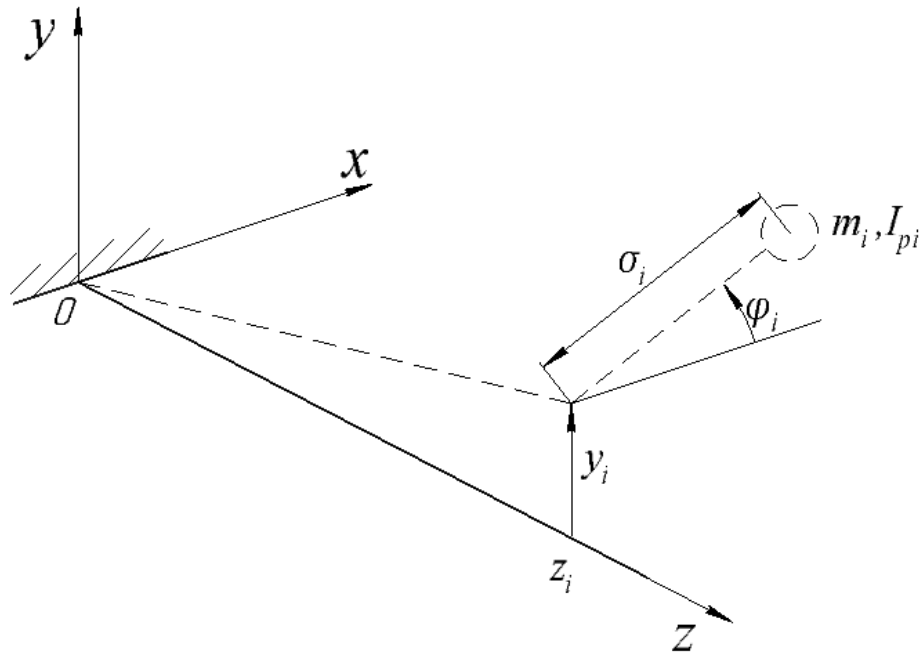


Рис. 84. Вертикальне переміщення і кут повороту перерізу

Вісь жорсткості крила в недеформованому стані є прямою лінією і збігається з віссю z . Нервюри в своїй площині мають велику жорсткість.

Нехай згинальна і крутильна жорсткості крила відомі. У загальному випадку жорсткості змінюються уздовж розмаху крила – $EI(z)$, $GI_\rho(z)$.

У кожен момент часу невідомими є $2n$ функцій:

$y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ – переміщення осі жорсткості в n точках крила;

$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ – кути повороту перерізів навколо осі жорсткості в n точках крила.

При коливаннях з'являються лінійні $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_n$ і кутові $\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2, \dots, \ddot{\phi}_n$ прискорення. Сили $F_{ин i}$ і моменти $M_{ин i}$ сил інерції діють у кожному перерізі крила

$$F_{ин1} = (-m_1 \ddot{y}_{c1}), F_{ин2} = (-m_2 \ddot{y}_{c2}), \dots, F_{инn} = (-m_n \ddot{y}_{cn})$$

$$M_{ин1} = (-I_{\rho c1} \ddot{\phi}_1), M_{ин2} = (-I_{\rho c2} \ddot{\phi}_2), \dots, M_{инn} = (-I_{\rho cn} \ddot{\phi}_n),$$

де \ddot{y}_{ci} – прискорення центру мас i -го відсіку;

$\ddot{\phi}_i$ – кутове прискорення i -го відсіку;

m_i – маса i -го відсіку;

$I_{\rho ci}$ – масовий момент інерції відсіку щодо його центру мас.

На рис. 85 показані позитивні напрямки для переміщень системи для i -го відсіку крила.

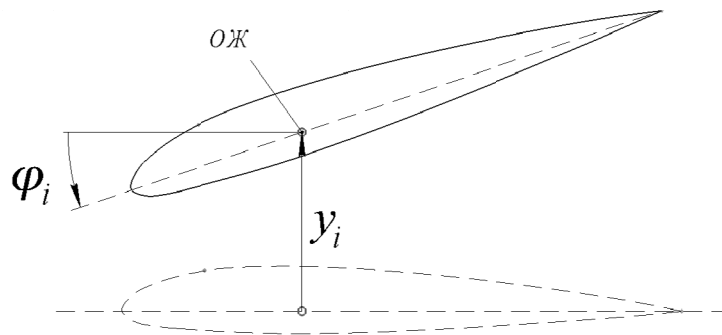


Рис. 85. Вертикальне переміщення і закручування перерізу крила

На рис. 86 показані лінійні та кутові прискорення при коливаннях крила і дії сил інерції.

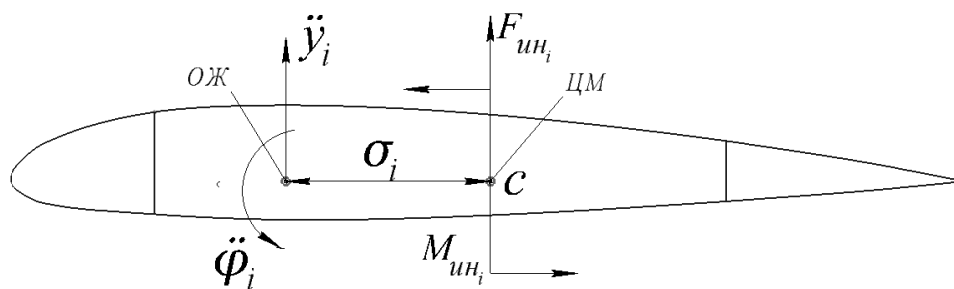


Рис. 86. Лінійні та кутові прискорення при коливаннях крила і дії сил інерції

Прискорення центру мас i -го відсіку

$$\ddot{y}_{ci} = \ddot{y}_i + \sigma_i \phi_i.$$

Сила інерції згідно з принципом Даламбера

$$F_{ин i} = -m_i a_{ci}$$

або

$$F_{in_i} = -m_i (\ddot{y}_i + \sigma_i \varphi_i) .$$

Момент сил інерції відсіку відносно центру мас

$$M_{in_i} = -I_{\rho c i} \ddot{\varphi}_i ,$$

а відносно осі жорсткості

$$M_{in_i} = (-m_i \sigma_i) \ddot{y}_i + [-I_{c_i} - \sigma_i^2 m_i] \ddot{\varphi}_i = (-m_i \sigma_i) \ddot{y}_i + [-(I_{c_i} + \sigma_i^2 m_i)] \ddot{\varphi}_i .$$

Оскільки сили приведені до осі жорсткості, то F_{in_i} викликають тільки переміщення осі жорсткості, а M_{in_i} – повороти щодо неї.

В силу лінійності системи і принципу суперпозиції виконуються такі $2n$ співвідношень:

$$y_1 = \delta_{11} [-m_1 (\ddot{y}_1 + \sigma_1 \ddot{\varphi}_1)] + \delta_{12} [-m_2 (\ddot{y}_2 + \sigma_2 \ddot{\varphi}_2)] + \dots + \delta_{1n} [-m_n (\ddot{y}_n + \sigma_n \ddot{\varphi}_n)] ;$$

$$y_2 = \delta_{21} [-m_1 (\ddot{y}_1 + \sigma_1 \ddot{\varphi}_1)] + \delta_{22} [-m_2 (\ddot{y}_2 + \sigma_2 \ddot{\varphi}_2)] + \dots + \delta_{2n} [-m_n (\ddot{y}_n + \sigma_n \ddot{\varphi}_n)] ;$$

.....

$$y_n = \delta_{n1} [-m_1 (\ddot{y}_1 + \sigma_1 \ddot{\varphi}_1)] + \delta_{n2} [-m_2 (\ddot{y}_2 + \sigma_2 \ddot{\varphi}_2)] + \dots + \delta_{nn} [-m_n (\ddot{y}_n + \sigma_n \ddot{\varphi}_n)] ;$$

$$\varphi_1 = \delta'_{11} [-I_1 \ddot{\varphi}_1 - m_1 (\ddot{y}_1 + \sigma_1 \ddot{\varphi}_1) \sigma_1] + \delta'_{12} [-I_2 \ddot{\varphi}_2 - m_2 (\ddot{y}_2 + \sigma_2 \ddot{\varphi}_2) \sigma_2] + \dots + \delta'_{1n} [-I_n \ddot{\varphi}_n - m_n (\ddot{y}_n + \sigma_n \ddot{\varphi}_n) \sigma_n] ;$$

$$\varphi_2 = \delta'_{21} [-I_1 \ddot{\varphi}_1 - m_1 (\ddot{y}_1 + \sigma_1 \ddot{\varphi}_1) \sigma_1] + \delta'_{22} [-I_2 \ddot{\varphi}_2 - m_2 (\ddot{y}_2 + \sigma_2 \ddot{\varphi}_2) \sigma_2] + \dots + \delta'_{2n} [-I_n \ddot{\varphi}_n - m_n (\ddot{y}_n + \sigma_n \ddot{\varphi}_n) \sigma_n] ;$$

.....

$$\varphi_n = \delta'_{n1} [-I_1 \ddot{\varphi}_1 - m_1 (\ddot{y}_1 + \sigma_1 \ddot{\varphi}_1) \sigma_1] + \delta'_{n2} [-I_2 \ddot{\varphi}_2 - m_2 (\ddot{y}_2 + \sigma_2 \ddot{\varphi}_2) \sigma_2] + \dots + \delta'_{nn} [-I_n \ddot{\varphi}_n - m_n (\ddot{y}_n + \sigma_n \ddot{\varphi}_n) \sigma_n] .$$

У співвідношеннях через δ_{ij} і δ'_{ij} позначені коефіцієнти піддатливості при дії на балку відповідно одиничної сили і одиничного моменту. На рис. 87 показано дію одиничних сил і моментів і переміщення від них.

Власні коливання відбуваються у вигляді

$$y_i = A_i \sin(\omega_c t + \alpha) ,$$

$$\varphi_{n+i} = A_{n+i} \sin(\omega_c t + \alpha) ,$$

де A_1, A_2, \dots, A_n – амплітуди переміщень;

$A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{2n}$ – амплітуди кутів повороту.

Прискорення при коливаннях

$$\ddot{y}_i = -A_i \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha); \quad \ddot{\varphi}_{n+i} = -A_{n+i} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha).$$

Після підстановки отримаємо співвідношення для прискорення в центрі мас

$$\ddot{y}_i + \sigma_i \ddot{\varphi}_i = -A_i \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) - \sigma_i A_{i+n} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) = -\omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) [A_i + \sigma_i A_{i+n}]$$

і моменту сил інерції щодо осі жорсткості

$$\begin{aligned} -I_i \ddot{\varphi}_i - m_i (\ddot{y}_i + \sigma_i \ddot{\varphi}_i) \sigma_i &= I_i A_{i+n} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) + m_i \sigma_i \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) [A_i + \sigma_i A_{i+n}] = \\ &= \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) [I_i A_{i+n} + m_i \sigma_i (A_i + \sigma_i A_{i+n})]. \end{aligned}$$

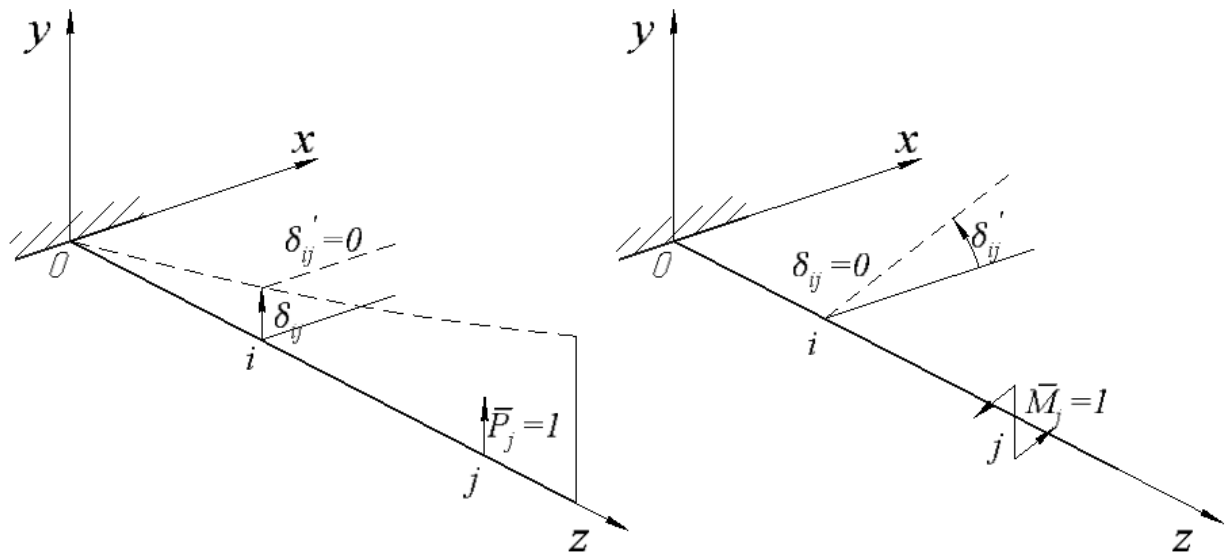


Рис. 87. Дія одиничних сил і моментів і переміщення від них

Співвідношення для переміщень можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} A_1 \sin(\omega_c t + \alpha) &= \delta_{11} m_1 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) (A_1 + \sigma_1 A_{1+n}) + \delta_{12} m_2 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) (A_2 + \sigma_2 A_{2+n}) + \dots + \\ &+ \delta_{1n} m_n \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) (A_n + \sigma_n A_{2n}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 \sin(\omega_c t + \alpha) &= \delta_{21} m_1 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) (A_1 + \sigma_1 A_{1+n}) + \delta_{22} m_2 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) (A_2 + \sigma_2 A_{2+n}) + \dots + \\ &+ \delta_{2n} m_n \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) (A_n + \sigma_n A_{2n}); \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} A_n \sin(\omega_c t + \alpha) &= \delta_{n1} m_1 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) (A_1 + \sigma_1 A_{1+n}) + \delta_{n2} m_2 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) (A_2 + \sigma_2 A_{2+n}) + \dots + \\ &+ \delta_{nn} m_n \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) (A_n + \sigma_n A_{2n}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{1+n} \sin(\omega_c t + \alpha) &= \delta'_{11} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) \left[I_1 A_{1+n} + m_1 \sigma_1 (A_1 + \sigma_1 A_{1+n}) \right] + \\
&+ \delta'_{12} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) \left[I_2 A_{2+n} + m_2 \sigma_2 (A_2 + \sigma_2 A_{2+n}) \right] + \\
&+ \dots + \delta'_{1n} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) \left[I_n A_{2n} + m_n \sigma_n (A_n + \sigma_n A_{2n}) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2+n} \sin(\omega_c t + \alpha) &= \delta'_{21} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) \left[I_1 A_{1+n} + m_1 \sigma_1 (A_1 + \sigma_1 A_{1+n}) \right] + \\
&+ \delta'_{22} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) \left[I_2 A_{2+n} + m_2 \sigma_2 (A_2 + \sigma_2 A_{2+n}) \right] + \\
&+ \dots + \delta'_{2n} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) \left[I_n A_{2n} + m_n \sigma_n (A_n + \sigma_n A_{2n}) \right];
\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
A_{n+n} \sin(\omega_c t + \alpha) &= \delta'_{n1} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) \left[I_1 A_{1+n} + m_1 \sigma_1 (A_1 + \sigma_1 A_{1+n}) \right] + \\
&+ \delta'_{n2} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) \left[I_2 A_{2+n} + m_2 \sigma_2 (A_2 + \sigma_2 A_{2+n}) \right] + \\
&+ \dots + \delta'_{nn} \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \alpha) \left[I_n A_{2n} + m_n \sigma_n (A_n + \sigma_n A_{2n}) \right];
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
(\delta_{11} m_1 \omega_c^2 - 1) A_1 + \delta_{12} m_2 \omega_c^2 A_2 + \dots + \delta_{1n} m_n \omega_c^2 A_n + \delta_{11} m_1 \omega_c^2 \sigma_1 A_{1+n} + \delta_{12} m_2 \omega_c^2 \sigma_2 A_{2+n} + \dots + \\
+ \delta_{1n} m_n \omega_c^2 \sigma_n A_{2n} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{21} m_1 \omega_c^2 A_1 + (\delta_{22} m_2 \omega_c^2 - 1) A_2 + \dots + \delta_{2n} m_n \omega_c^2 A_n + \delta_{21} m_1 \omega_c^2 \sigma_1 A_{1+n} + \delta_{22} m_2 \omega_c^2 \sigma_2 A_{2+n} + \dots + \\
+ \delta_{2n} m_n \omega_c^2 \sigma_n A_{2n} = 0;
\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
\delta_{n1} m_1 \omega_c^2 A_1 + \delta_{n2} m_2 \omega_c^2 A_2 + \dots + (\delta_{nn} m_n \omega_c^2 - 1) A_n + \delta_{n1} m_1 \omega_c^2 \sigma_1 A_{1+n} + \delta_{n2} m_2 \omega_c^2 \sigma_2 A_{2+n} + \dots + \\
+ \delta_{nn} m_n \omega_c^2 \sigma_n A_{2n} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta'_{11} \omega_c^2 m_1 \sigma_1 A_1 + \delta'_{12} m_2 \omega_c^2 A_2 + \dots + \delta'_{1n} \omega_c^2 m_n A_n + \left[\delta'_{11} \omega_c^2 (I_1 + m_1 \sigma_1^2) - 1 \right] A_{1+n} + \\
\delta'_{12} \omega_c^2 (I_2 + m_2 \sigma_2^2) A_{2+n} + \dots + \delta'_{1n} \omega_c^2 (I_n + m_n \sigma_n^2) A_{2n} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta'_{21} \omega_c^2 m_1 \sigma_1 A_1 + \delta'_{22} m_2 \omega_c^2 A_2 + \dots + \delta'_{2n} \omega_c^2 m_n A_n + \left[\delta'_{21} \omega_c^2 (I_1 + m_1 \sigma_1^2) - 1 \right] A_{1+n} + \\
\delta'_{22} \omega_c^2 (I_2 + m_2 \sigma_2^2) A_{2+n} + \dots + \delta'_{2n} \omega_c^2 (I_n + m_n \sigma_n^2) A_{2n} = 0;
\end{aligned}$$

...

$$\delta'_{n1} \omega_c^2 m_1 \sigma_1 A_1 + \delta'_{n2} m_2 \omega_c^2 \sigma_2 A_2 + \dots + \delta'_{nn} \omega_c^2 m_n \sigma_n A_n + \delta'_{n1} \omega_c^2 (I_1 + m_1 \sigma_1^2) A_{1+n} + \delta'_{n2} \omega_c^2 (I_2 + m_2 \sigma_2^2) A_{2+n} + \dots + \left[\delta'_{nn} \omega_c^2 (I_n + m_n \sigma_n^2) - 1 \right] A_{2n} = 0.$$

Скористаємося далі матричними позначеннями. Введемо вектор-стовпець узагальнених переміщень

$$A^T = (y_1, y_2, \dots, y_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n),$$

тоді вектор-стовпець узагальнених прискорень

$$(\ddot{A})^T = (\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_n, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \dots, \ddot{\varphi}_n).$$

Задача може бути зведена до задачі на власні значення матричного рівняння. При цьому

$$-A = \delta M \ddot{A}.$$

де δ і M – матриці коефіцієнтів піддатливості і мас.

Введемо матрицю

$$B = \delta M,$$

тому справедливе рівняння

$$-A = B \ddot{A}.$$

Але для вектора-стовпця амплітуд маємо

$$\ddot{A} = -\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) A,$$

отже,

$$B \{A\} = \frac{1}{\omega^2} \{A\}.$$

Власні частоти пов'язані з власними значеннями матриці B співвідношенням

$$\frac{1}{\omega^2} = \lambda,$$

тоді $2n$ частот визначають так:

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \omega.$$

Форми і частоти сумісних згинально-крутильних коливань консолі суттєво залежать від координати центру мас відносно осі жорсткості

$$\sigma(z) = x_{cm}(z) - x_{cm}(z).$$

На рис. 88 показано характерне для ЛА положення центрів жорсткості і мас крила вздовж розмаху крила.

У районі розташування двигуна величина $\sigma(z)$ від'ємна - тобто центр мас знаходиться попереду центра жорсткості.

Для літака типу Ан-148 на рис. 89 – 93 показані форми і частоти сумісних згинально-крутильних коливань консолі крила. Схематично показано тільки деформацію ділянки крила, розташованої симетрично відносно осі жорсткості і вздовж розмаху. Нумерацію форм наведено згідно з номером пружного тону коливань.

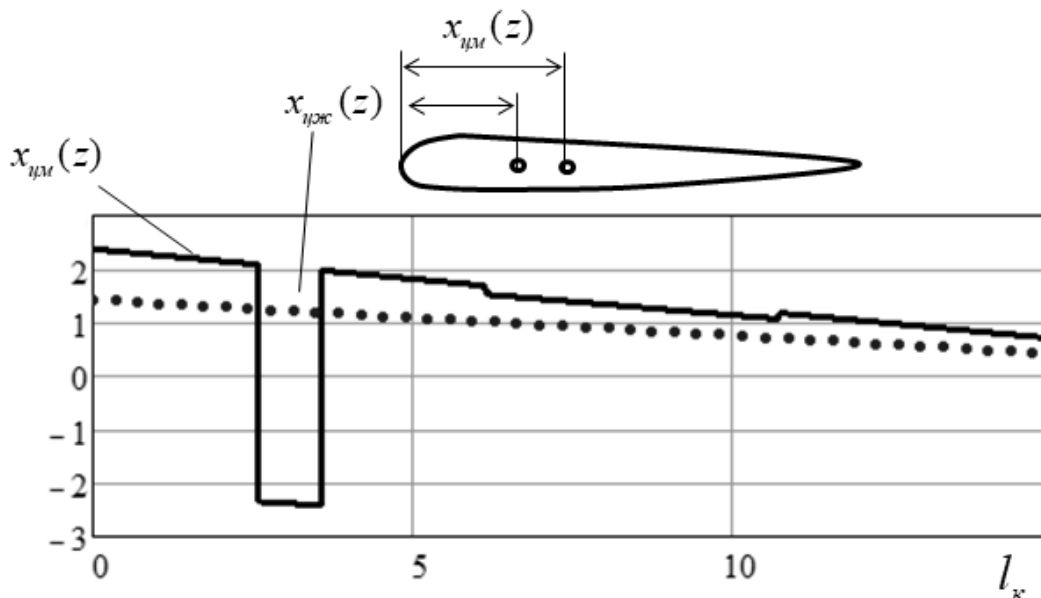


Рис. 88. Положення центрів жорсткості і мас крила

Перша форма характеризується в основному згинальними коливаннями консолі, а друга – крутильними.

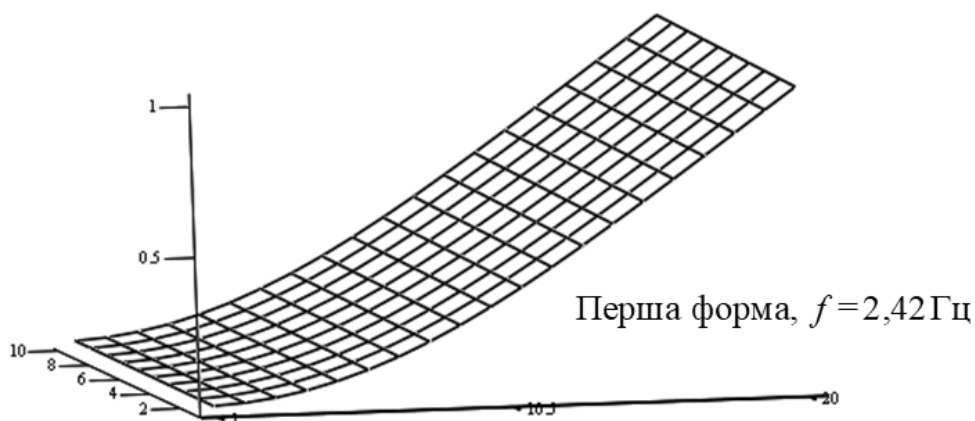


Рис. 89. Перша форма згинальних коливань

У місці розміщення двигуна маємо різку зміну в крученні консолі (рис. 90). Це пояснюється дією значних сил інерції від маси двигуна.

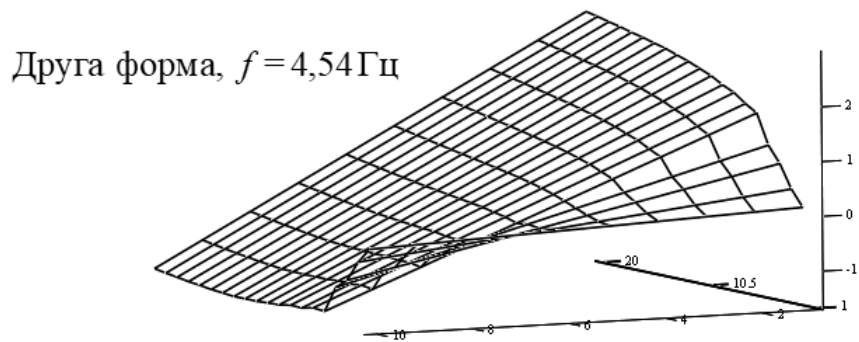


Рис. 90. Перша форма крутильних коливань

На рис. 91 показано форму коливань за другим згинальним тоном, мається одна вузлова лінія, що нерухома при коливаннях.

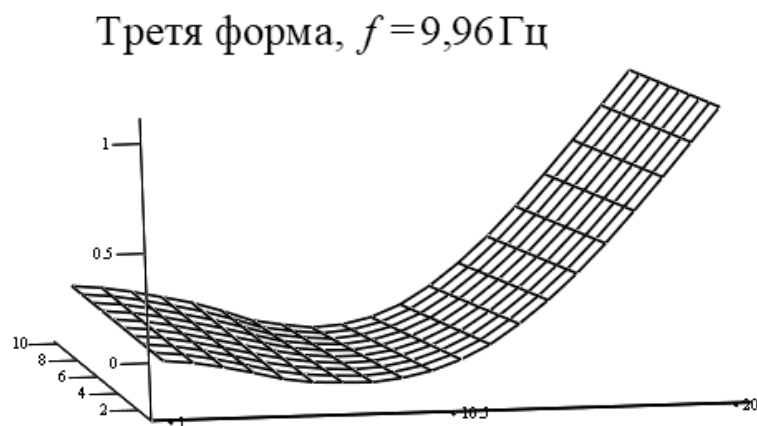


Рис. 91. Друга форма згинальних коливань

На рис. 92 і 93 показані форми коливань згідно із четвертим і шостим тоном, коли одночасно виявляються згинальні та крутильні деформації.

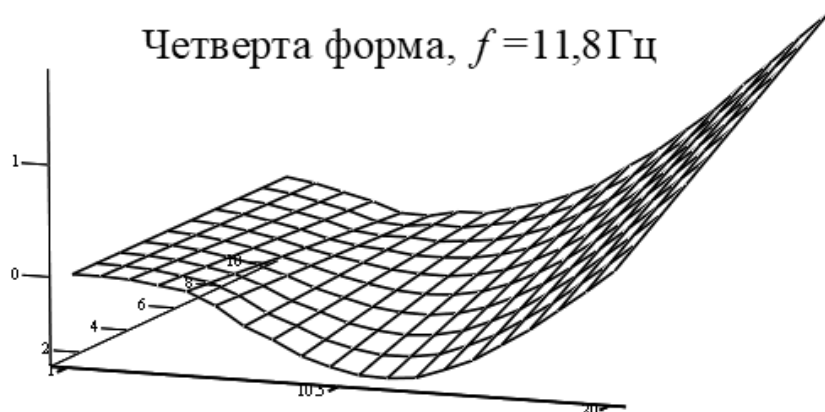


Рис. 92. Згинально-крутильна деформація консолі за четвертим тоном

Шоста форма, $f = 26,7\text{Гц}$

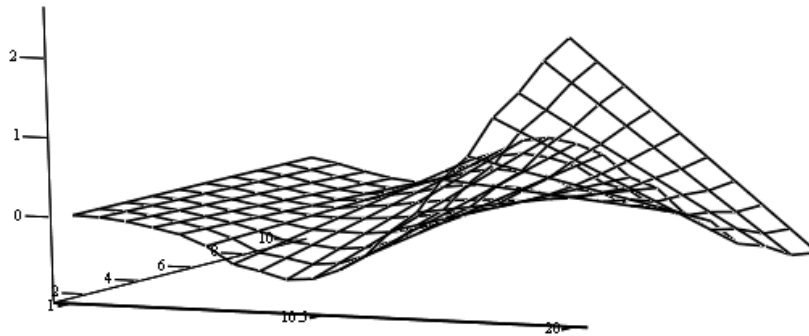


Рис. 93. Згинально-крутильна деформація консолі за шостим тоном

Відмітимо, що конструкція в процесі експлуатації може давати відгук за певними тонами пружних коливань. Це залежить від близькості частоти зовнішнього впливу до частоти власних коливань і характеру розподілу по несучій поверхні нестационарного навантаження.

Частоти і форми власних коливань вільного літального апарата просторової схеми

Літак являє собою єдину пружну систему, і всі його частини коливаються спільно. Фюзеляж не є абсолютно жорстким, тому коливання крила мають викликати пружні коливання фюзеляжу, оперення, і навпаки.

Якщо розглядати літак як систему, яка вільно переміщається в просторі, то сили інерції та їх моменти щодо будь-яких осей мають самі собою врівноважуватися. Звідси виходить шість умов рівноваги: три умови рівноваги сил інерції за трьома взаємно перпендикулярними напрямками і три умови рівності нулю моментів сил інерції навколо трьох взаємно перпендикулярних осей.

Крім того, слід записати рівняння деформації окремих балок і сумісність їх деформацій. У процесі вільних коливань мають виконуватися граничні умови для кожної із балок:

- кінематичні;
- силові.

Таким чином, система рівнянь щодо вільних коливань має містити умови самоврівноваженості сил і моментів сил інерції, а також рівняння деформації балок – згинання і кручення осі жорсткості. Задача зводиться до визначення власних чисел і векторів відповідного матричного рівняння.

За розрахункову схему пружного ЛА приймемо сукупність чотирьох балок – двох консолей стрілоподібного крила, а також носової і хвостової частин фюзеляжу.

Будемо вважати, що будь-який переріз балки переміщується як жорстке ціле. Переміщення точок крила або фюзеляжу можна подати як переміщення осі жорсткості у вертикальному напрямку $y(t, z) = y(t, z, x)$ і повороту перерізу навколо осі жорсткості на кут $\varphi(t, z)$.

Розглянемо ізольовані згинальні, а також зв'язані, згинально-крутильні коливання вільного ЛА.

Система лінійних рівнянь щодо невідомих переміщень дозволяє визначити власні значення – форми і частоти вільних коливань ЛА. Серед форм коливань є такі, що характеризують переміщення ЛА як твердого тіла – так звані нульові тони. Форми пружних коливань нумерують відповідно до зростання частоти власних коливань. Вони нормовані так, що переміщення кінця крила дорівнює одиниці.

Форми і частоти власних згинальних коливань ЛА для перших двох симетричних тонів показані на рис. 94.

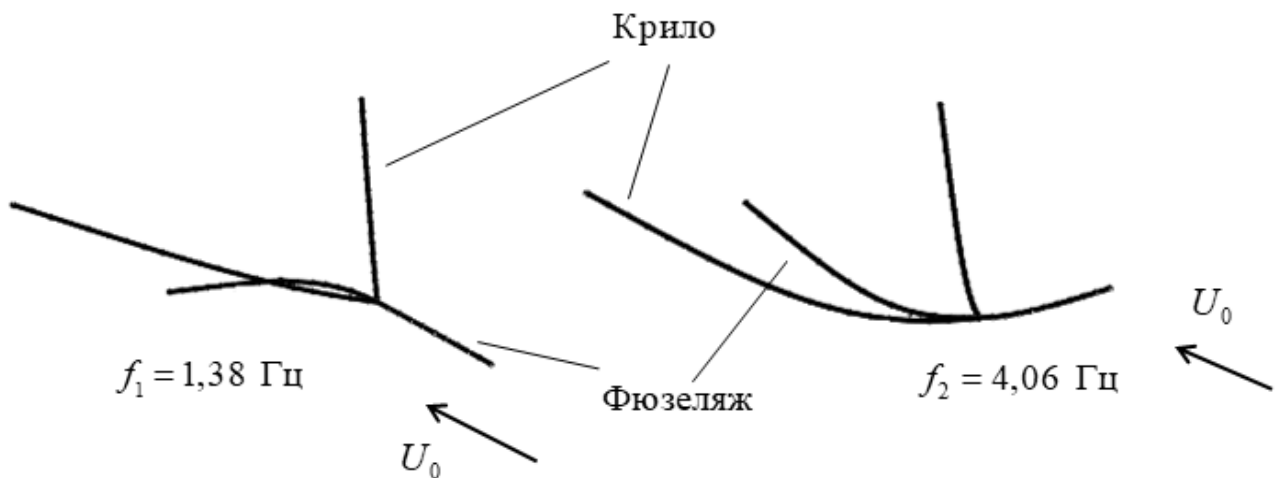


Рис. 94. Перші тони симетричних згинальних форм коливань вільного літального апарата.

Слід відмітити, що характер взаємного руху частин ЛА суттєво відрізняється при відносно невеликій різниці власної частоти тонів.

На рис. 95 показано симетричну і косиметричну форми коливань ЛА і відповідні частоти.

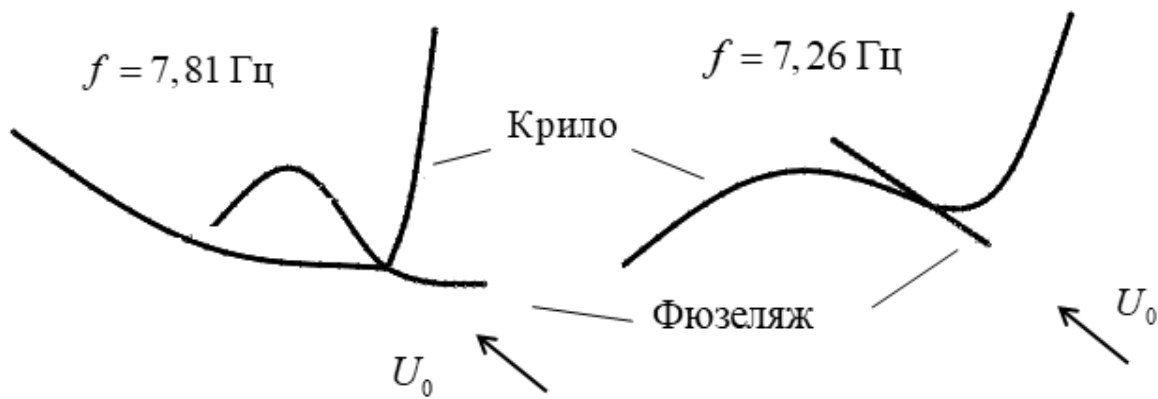


Рис. 95. Друга згинальна форма коливань вільного літального апарата.

При кососиметричній формі коливань ЛА фюзеляж симетричного літака нерухомий.

Чим вище номер пружного тона, тим більше викривлення осі балок ЛА (рис. 96).

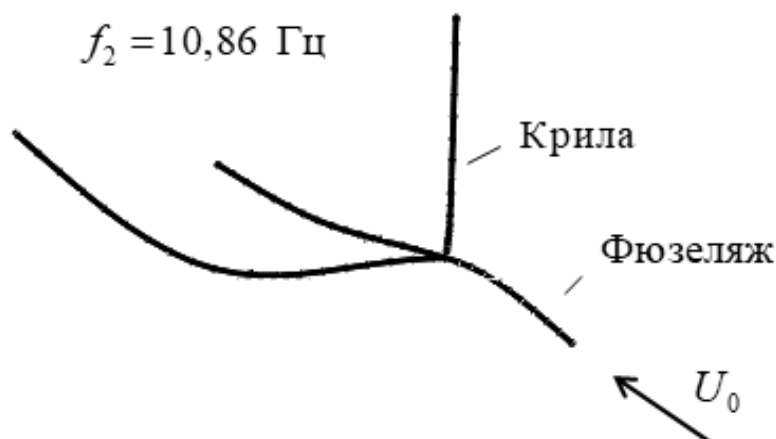


Рис. 96. Симетричні коливання крила і фюзеляжу

Сумісні згинально-крутильні коливання вільного ЛА відбуваються при зміщенні центру мас відносно осі жорсткості. На рис. 97 показано дискретну модель ЛА як сукупність дискретних мас, що у загальному випадку не збігаються з осями жорсткості (на рисунку – суцільні лінії). Цей випадок може трапитися при неправильному завантаженні фюзеляжу.

Така досить складна механічна система має широкий спектр власних частот.

На рис. 98 показано симетричний перший тон пружних коливань ЛА. Для наочності зображено деформацію ділянок крила і фюзеляжу, що розташовані симетрично відносно осі жорсткості і вздовж осей балок.

Як видно, деформація кручення перерізів практично відсутня, цю форму можна трактувати як симетричну першу згинальну.

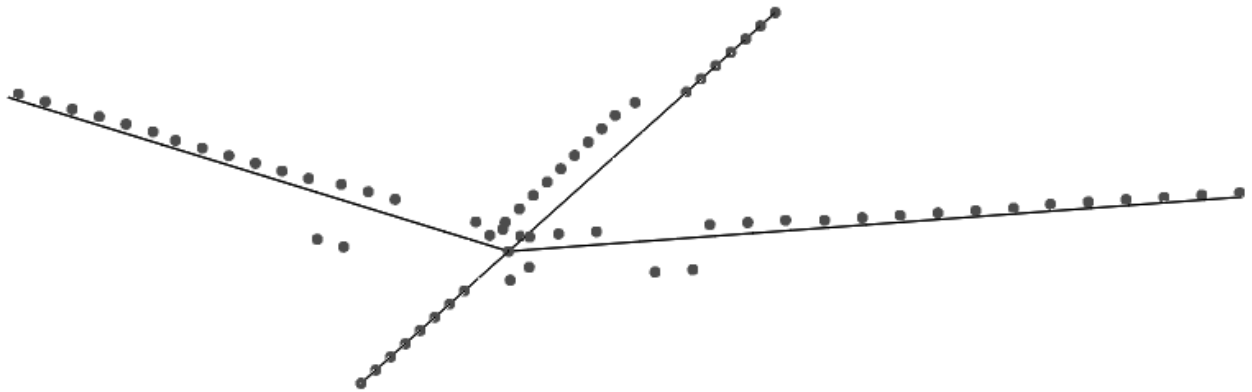


Рис. 97. Дискретна модель вільного ЛА

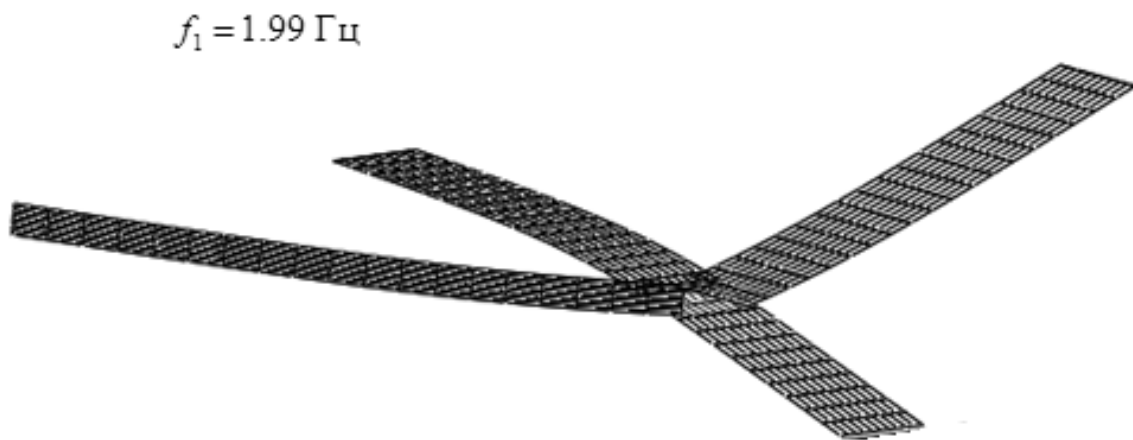


Рис. 98. Симетричний перший тон пружних коливань

Другий тон симетричних пружних коливань зображено на рис. 99. На фюзеляжі маються вузлові лінії. Відзначимо, що деформація згинання крила приводить до зміни місцевих кутів атаки елементів несучих поверхонь, що важливо при визначенні нестационарного навантаження ЛА.

$$f_3 = 8.22 \text{ Гц}$$



Рис. 99. Симетричний другий тон пружних коливань

Вільні коливання ЛА, як видно, супроводжуються значними коливаннями фюзеляжу. Тільки в окремих випадках ними можна нехтувати.

1.3.6. Метод заданих форм. Розкладання руху системи за формами власних коливань

Рух мас динамічної системи при зовнішньому збуренні відбувається за певним законом

$$y_k = y_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, N_q), \quad (143)$$

де y_k – узагальнені координати, у загальному випадку це лінійні й кутові переміщення елементів, що мають масу або момент інерції (вертикальне і кутове переміщення перерізу крила);

N_q – число степенів вільності системи.

Відповідним вибором координат можна систему диференціальних рівнянь (106) спростити так, що кожне рівняння буде містити тільки одну невідому величину.

Значні переваги порівняно з прямим і зворотним методами розрахунку пружних переміщень має метод заданих форм. Суть методу полягає в тому, що шукані переміщення $y_k(t)$ виражаються через узагальнені координати $q_k(t)$ і відповідні їм ортогональні амплітуди власних коливань A_{ik} .

Введемо нові координати $q_k(t)$ так, щоб виконувалися співвідношення

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) A_{ik}, \quad (144)$$

де A_{ik} – амплітуди переміщень точок при $\omega = \omega_k$. Таке перетворення завжди можливе.

Якщо використати умову ортогональності форм, то отримаємо

$$q_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{jk} y_i\right)}{M_k},$$

$$M_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{jk} A_{ik}.$$

Величину M_k називають узагальненою масою системи при k -й формі коливань, а координати q_k – головними.

Для системи з діагональною матрицею мас формули спрощуються

$$q_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i A_{ik} y_i}{M_k};$$

$$M_k = \sum_{i=1}^n m_i A_{ik}^2.$$

Вираз кінетичної і потенціальної енергії через головні координати

Кінетична енергія, що залежить від координат y_i ($i = 1, 2, \dots, n$), має вигляд

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j.$$

З урахуванням співвідношення (144) узагальнена швидкість \dot{y}_i залежить від головних координат

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k A_{ik}.$$

Тоді

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(m_{ij} \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \dot{q}_k \dot{q}_r A_{ik} A_{jr} \right).$$

Змінюючи порядок підсумовування і відповідно до співвідношення ортогональності, отримуємо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n M_k \dot{q}_k^2, \quad (145)$$

де M_k – узагальнена маса системи при k -й формі коливань. Аналогічно для потенціальної енергії

$$U = \sum_{k=1}^n U_k q_k^2, \quad (146)$$

де

$$U_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} A_{ik} A_{jk} \quad (147)$$

є потенціальна енергія системи при деформаціях, що відповідають k -й формі коливань.

Оскільки

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} A_{jk} = p_k^2 \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{jk},$$

то

$$U_k = \frac{1}{2} p_k^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{ik} A_{jk} = \frac{1}{2} p_k^2 M_k. \quad (148)$$

Завдяки ортогональності власних форм кінетична і потенціальна енергії системи виражаються сумами енергій, відповідних кожній з головних координат. Тоді

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = M_k \dot{q}_k; \quad \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = p_k^2 M_k q_k \quad (149)$$

і рівняння руху в формі Лагранжа має вигляд

$$M_k \ddot{q}_k + p_k^2 M_k q_k = Q_k; \quad (150)$$

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k}{M_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (151)$$

Тут узагальнені сили Q_k являють собою віртуальну роботу всіх зовнішніх сил на одиничній варіації координати q_k ($q_k = 1$):

$$Q_k = \sum_{i=1}^n F_i A_{ik}, \quad (152)$$

де під знаком суми стоїть скалярний добуток сили на переміщення. Відзначимо, що сили F_i можуть залежати від q_k і \dot{q}_k .

Якщо амплітудні переміщення A_{ik} i -х точок – це вертикальне переміщення і кут повороту навколо осі жорсткості, то їх можна навести як функції $f_k(z)$ і $\varphi_k(z)$ координати z

$$\begin{aligned} y(z,t) &= \sum f_k(z) q_k(t); \\ \Delta\varphi(z,t) &= \sum \varphi_k(z) q_k(t), \end{aligned} \tag{153}$$

На рис. 100 показана дія на крило погонних аеродинамічних сил $q_{n\text{пов}}(z)$ і аеродинамічних моментів $m_{n\text{пов}}(z)$. Як видно, це головний вектор і головний момент розподілених по профілю аеродинамічних сил. Точкою приведення сил і моментів є вісь жорсткості, яка збігається з віссю z . Для сил і моментів відповідними переміщеннями є $f_k(z)$ і $\varphi_k(z)$.

На цих лінійних і кутових переміщеннях погонні аеродинамічні сили і моменти (рис. 100) виконують роботу на одиничній варіації координати q_k для балки довжиною l_B

$$Q_k = \int_0^{l_B} f_k(z) q_{n\text{пов}}(z) dz + \int_0^{l_B} \varphi_k(z) m_{n\text{пов}}(z) dz.$$

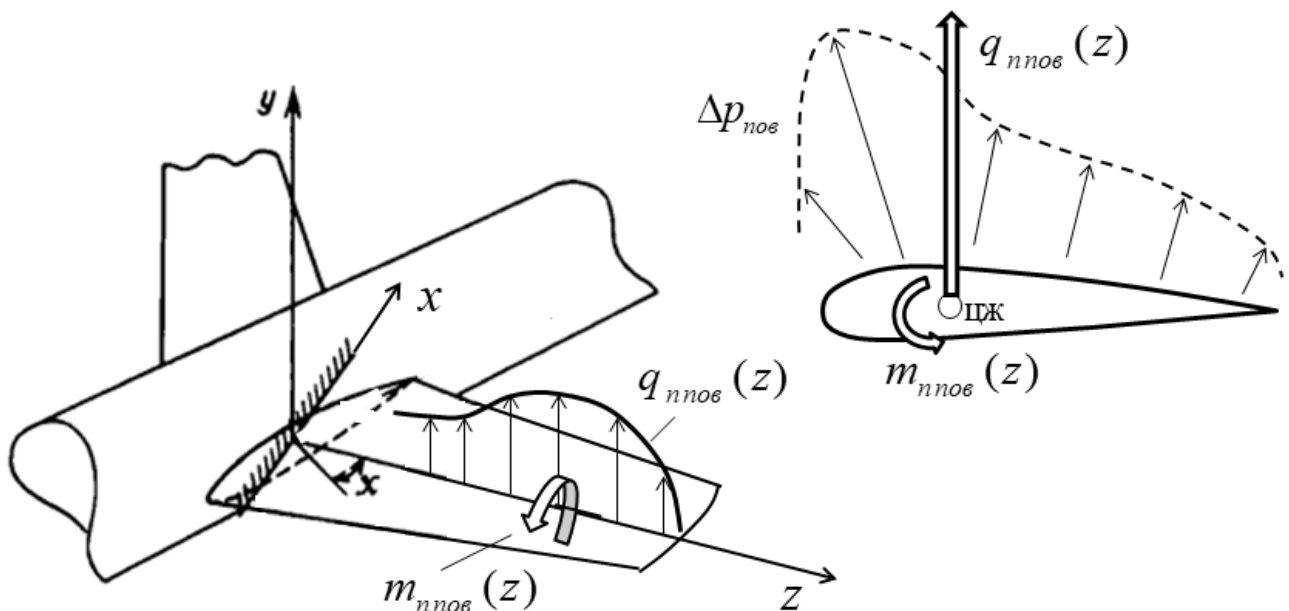


Рис. 100. Дія погонних аеродинамічних сил і аеродинамічних моментів

Наведені вище рівняння динаміки ЛА були отримані в припущенні, що при коливаннях конструкції енергія не розсіюється. На практиці завжди відбувається загасання коливань, навіть у пустоті. Це пояснюється

наявністю конструкційного демпфірування, яке складається з тертя в заклепках елементів і розсіювання енергії всередині матеріалу, тобто за наявності непружного опору матеріалу конструкції [2]. У цей час не існує обґрунтованих і надійних методів розрахунку кількісних характеристик демпфірування. Зазвичай використовують наближений підхід, оснований на застосуванні гіпотези в'язкого тертя. Відповідно до цієї гіпотези демпфірувальні сили в конструкції вважають пропорційними швидкості пружних деформацій:

$$Q_k = -2M_k \chi_k p_k \dot{q}_k, \quad (154)$$

де χ_k – коефіцієнт конструкційного демпфірування діагональної матриці χ . Ці коефіцієнти визначають при випробуванні конструкції на різних режимах. Демпфірувальні сили не враховують при виведенні основних рівнянь і обчисленні частот і форм власних коливань реальної конструкції, а вводять в остаточні вирази.

Замість рівнянь (150) і (151) отримаємо систему диференціальних рівнянь пружних коливань крила або всього ЛА при дії нестационарного навантаження:

$$\ddot{q}_k + 2\chi_k p_k \dot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k}{M_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (155)$$

У співвідношеннях немає ні інерційної, ні пружної взаємодії невідомих узагальнених координат q_k . Узагальнені сили обчислюють для відомих значень параметрів руху і деформування ЛА.

Гармонічні збурювальні сили

Якщо на систему діють гармонічні сили з різними фазами і частотою ω_g

$$F_i(t) = F_{ai} \cos(\omega_g t - \varphi_i), \quad (156)$$

то їх можна подати як суми

$$F_i(t) = F_{ic} \cos \omega_g t + F_{is} \sin \omega_g t, \quad (157)$$

де

$$F_{ic} = F_{ai} \cos \varphi_i, \quad F_{is} = F_{ai} \sin \varphi_i.$$

З огляду на лінійність системи її рух являє собою суму рухів, що викликаються силами, пропорційними $\cos \omega_g t$ і $\sin \omega_g t$ окремо.

Розглянемо рух, що викликається силами, пропорційними $\cos \omega_g t$. У

цьому випадку узагальнена сила, відповідна координаті q_k , також пропорційна $\cos \omega_\epsilon t$:

$$Q_k^{(c)} = \sum_{i=1}^2 F_{ic} A_{ik} \cos \omega_\epsilon t.$$

Рівняння

$$\ddot{q}_k + \omega_{ck}^2 q_k = \left[\sum_{i=1}^2 F_{ic} A_{ik} / M_k \right] \cos \omega_\epsilon t \quad (158)$$

має стаціонарне рішення

$$q_k = \frac{\sum_{i=1}^2 F_{ic} A_{ik}}{M_k \omega_{ck}^2} \frac{1}{1 - \omega_\epsilon^2 / \omega_{ck}^2} \cos \omega_\epsilon t. \quad (159)$$

Відповідно рух будь-якої точки системи під дією сил, пропорційних $\cos \omega_\epsilon t$, визначається виразом ($i = 1, 2$)

$$y_i^{(c)} = \sum_{k=1}^2 q_k A_{ik} = \cos \omega_\epsilon t \sum_{k=1}^2 \frac{\sum_{j=1}^2 F_{jc} A_{jk}}{(1 - \omega_\epsilon^2 / \omega_{ck}^2) M_k \omega_{ck}^2} A_{ik}. \quad (160)$$

Аналогічно сили, пропорційні $\sin \omega_\epsilon t$, викликають переміщення

$$y_i^{(s)} = \sin \omega_\epsilon t \sum_{k=1}^2 \frac{\sum_{j=1}^n F_{js} A_{jk}}{(1 - \omega_\epsilon^2 / \omega_{ck}^2) M_k \omega_{ck}^2} A_{ik}, \quad (161)$$

і сумарний рух виражається як

$$y_i = y_i^{(c)} + y_i^{(s)}.$$

Отримані вирази показують, що при гармонічному збуренні система коливається з частотою вимушених коливань, а форма її змінюється залежно від частоти.

Якщо частота збурення наближається до однієї з власних частот системи, то величина відповідних членів у виразах (160) і (161) необмежено зростає (в системі без демпфірування). Таким чином, резонанс виникає при збігу частоти збурення з будь-якою власною частотою системи. При резонансі на частоті ω_{ck} форма вимушених коливань системи збігається з k -ю власною формою, оскільки інші складові в рядах (160) і (161) стають малими порівняно з резонуючими.

При гармонічному збуренні метод головних координат не є найбільш економним способом вирішення завдання. Їм доцільно користуватися тільки в тому випадку, якщо власні частоти і форми коливань вже відомі. При дії гармонічних збурювальних сил, пропорційних, наприклад, $\cos \omega_g t$, рішення рівнянь руху слід шукати в формі

$$y_i = A_i \cos \omega_g t.$$

Підставляючи ці значення в рівняння руху (записані в прямій або зворотній формі), отримуємо систему лінійних неоднорідних рівнянь щодо A_i .

1.3.7. Динамічні характеристики пружного літального апарата

Основні динамічні характеристики пружного ЛА – це зміщення точок конструкції щодо їх положення в базовому режимі польоту, їх швидкості і прискорення, а також динамічні навантаження (внутрішні зусилля, напруження) в перерізах апарата.

Наведемо формули для розрахунку зазначених динамічних характеристик.

Швидкості $\Delta \dot{\vec{r}}$ і прискорення $\Delta \ddot{\vec{r}}$ точок, що пов'язані з пружним переміщенням конструкції, отримують шляхом диференціювання (153) за часом:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\vec{r}} &= \sum_{l=1}^N f_l \dot{q}_l; \\ \Delta \ddot{\vec{r}} &= \sum_{l=1}^N f_l \ddot{q}_l, \end{aligned} \tag{162}$$

де q_l – узагальнена координата;

f_l – форма коливань, що відповідає l -му тону пружних коливань.

При дослідженні міцності й ресурсу ЛА основні динамічні характеристики ЛА – це інтегральні внутрішні зусилля, що діють у перерізах елементів конструкції. У загальному випадку в довільному перерізі конструкції можна знайти внутрішні сили і моменти:

$$L = [Q_x, Q_y, N, M_x, M_y, M_z]. \tag{163}$$

Внутрішні зусилля в перерізах конструкції визначаються дією зовнішніх збурювальних та інерційних сил, обумовлених рухом ЛА як жорсткого тіла і його пружними переміщеннями.

Динамічні навантаження (згинальні і крутильні моменти, перерізувальні сили, прискорення в різних перерізах конструкції) знаходять після інтегрування рівнянь аеропружності за часом на основі двох підходів: 1) за деформацією конструкції; 2) за розподіленими силами, що діють при коливаннях.

Ці два підходи дають одне і те ж значення тільки в разі утримання нескінченного числа тонів коливань N , прийнятих при розкладанні переміщень у ряд за власними формами.

Слід ураховувати, що пружні деформації й швидкості деформування конструкції крила мають велике значення в розподілі навантаження по крилу. Навантаження, розраховані в припущенні жорсткого ЛА, не відповідають дійсності.

Характер розподілу напружень вздовж крила при згинальних коливаннях отримуємо, використовуючи відому формулу

$$\sigma = \frac{M_{3z}(z)h}{I_x} \varphi_i = \frac{E_{ред} I_x y''(z)h}{I_x} \varphi_i = E_{ред} h y''(z) \varphi_i, \quad (164)$$

де σ – напруження, що діє в крилі;

$M_{3z}(z)$ – згинальний момент, необхідний для створення кривизни $y''(z)$ балки;

$E_{ред}$ – модуль пружності матеріалу редукованого перерізу;

φ_i – редуційний коефіцієнт елемента;

h – відстань від головної центральної осі до найбільш віддаленої точки профілю.

Враховуючи, що деформація крила розкладена за формами власних коливань, для відомих узагальнених координат маємо

$$y(z,t) = \sum_k f_k(z) q_k(t).$$

Диференціюючи функцію вертикальних переміщень $y(z,t)$, одержуємо

$$\sigma(z,t) = Eh y'' = Eh \sum_k f_k''(z) q_k(t), \quad (165)$$

Видно, що напруження змінюються у часі і вздовж координати z . Слід відзначити, що перші форми власних коливань дають основний внесок у величину нормального напруження елементів перерізу.

Для конструкції, як лінійної системи, справедливий принцип суперпозиції, тому напруження, яке пов'язане з дією пориву, додається до

напруження у сталому горизонтальному польоті $\sigma_{\Gamma\Pi}(z,t)$. Сумарне напруження в силовому елементі

$$\sigma_{\Sigma}(z,t) = \sigma(z,t) + \sigma_{\Gamma\Pi}(z,t)$$

є деяка змінна у часі реалізація.

Однією з основних задач розроблення ЛА є створення конструктивно-силової схеми (КСС) літака, призначеної для сприйняття діючих зовнішніх навантажень і забезпечення необхідних характеристик жорсткості і втомних характеристик. Процес формування КСС, так само, як і процес проектування ЛА, поділяють на етапи: технічна пропозиція, ескізний проект, робоче проектування, виготовлення дослідних зразків, льотні випробування, запуск у серійне виробництво і масова експлуатація.

У небезпечній точці ЛА у процесі експлуатації не має бути руйнувань від максимальних значень напружень $\sigma_{\Sigma}(z,t)$ (проблема статичної міцності) і від змінних у часі напружень, навіть невеликих (проблема ресурсу конструкції).

На всіх цих етапах важливе місце посідають проблеми аеропружності літака.

В задачі динамічної реакції пружної конструкції велике значення має пошук максимальних величин навантажень, деформацій або напружень у конструкції, у ряді випадків – і їх повторюваність.

Динамічні навантаження від неспокійного повітря в ряді випадків є настільки важкими для конструкції, що доводиться вживати заходів до їх зниження. Для цього розробляють різні автоматичні системи, що зменшують навантаження від руху літака як твердого тіла і пружних коливань конструкції. Виконавчими органами можуть бути руль висоти і напрямку, закрилки, інтерцептори, елевони та інші поверхні, що відхиляються. Вони створюють аеродинамічні сили, які протидіють навантаженням від поривів і сприятливо впливають на рух конструкції. Для роботи системи зниження навантажень потрібна висока швидкодія потужних бустерів і надійність їх роботи. Незважаючи на внесені при цьому витрати, на практиці отримують не тільки зниження ваги конструкції, але й збільшення її ресурсу.

Внаслідок складності задання динамічних навантажень теоретичним шляхом у ряді випадків звертаються до експериментальної перевірки. Одним із способів вирішення цієї проблеми є випробування динамічно подібних моделей в аеродинамічній трубі і льотний експеримент.

ММ аеропружності, що функціонують паралельно зі створенням ЛА і постійно вдосконалюються, дають важливу проміжну інформацію щодо створення надійної авіаційної техніки.

Відзначимо, що предметом особливої уваги має бути математичне забезпечення коректності проведення числових досліджень. На рис. 101 зображені основні етапи щодо обґрунтування і контролю достовірності ММ аеропружності.

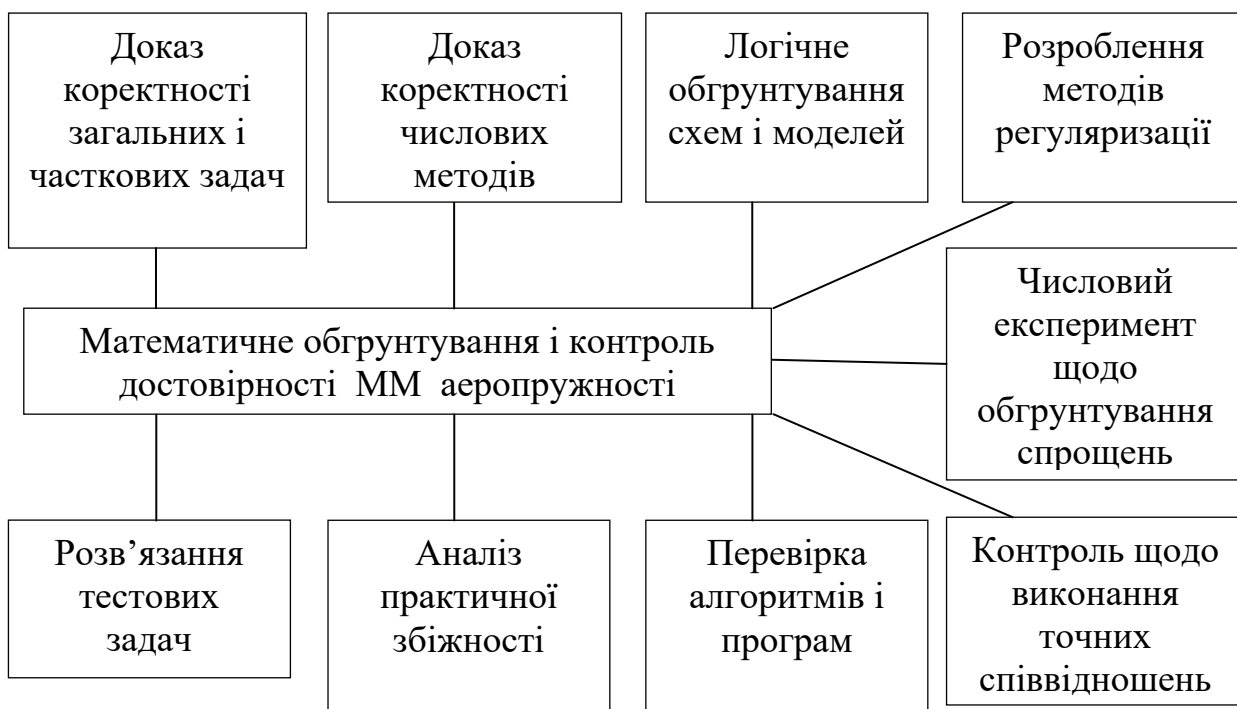


Рис. 101. Математичне забезпечення коректності проведення числових досліджень

Аналіз вирішення сучасних проблем аеропружності ЛА показує, що класичні розрахункові схеми, які спираються на аналітичні методи досліджень, уже не можуть бути основою научної бази. Необхідно створення нової методології наукових досліджень на основі комплексного залучення аналітичного і експериментального методів й широкого застосування математичного моделювання і розрахункового експерименту на ПЕОМ.

2. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ ДИНАМІЧНОЇ РЕАКЦІЇ КОНСТРУКЦІЇ ЛА НА ДІЮ АТМОСФЕРНОЇ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

Визначимо динамічну реакцію літака на дію вертикального пориву. Вихідним є режим сталого горизонтального польоту.

Лінеаризовані рівняння збуреного руху ЛА в поздовжній площині відносно базового прямолінійного горизонтального польоту були встановлені вище і мають вигляд [2]

$$\begin{aligned} MU_0(\Omega_z - \dot{\alpha}) &= Y; \\ I_z \Omega_z &= M_z; \\ \ddot{q}_k + 2\chi_k p_k \dot{q}_k + p_k^2 q_k &= \frac{Q_k}{M_k} \quad (k=1, 2, \dots, N_q). \end{aligned} \quad (166)$$

Перші два рівняння описують рух ЛА як твердого тіла – вертикальне переміщення центру мас літака і обертання навколо нього. Такий рух відбувається під дією зовнішніх сил Y і моментів M_z .

Рівняння пружних коливань конструкції отримують на основі методу заданих форм. Утримують N_q форм власних коливань. Кожне з цих рівнянь описує рух, який відбувається за власними формами $f_k(z)$ і $\varphi_k(z)$ коливань ЛА.

Узагальнена сила Q_k для k -го тону – це робота погонних аеродинамічних сил $q_{n\text{нов}}(z)$ і погонних аеродинамічних моментів $m_{n\text{нов}}(z)$ на можливих переміщеннях $f_k(z)$ і $\varphi_k(z)$:

$$Q_k = \sum_{n_B} \int_0^{l_{n\delta}} f_k(z) q_{n\text{нов}}(z) dz + \sum_{n_B} \int_0^{l_{n\delta}} \varphi_k(z) m_{n\text{нов}}(z) dz, \quad (167)$$

де інтегрування відбувається по довжині $l_{n\delta}$ n_B навантажених балок.

Підкреслимо, що $f_k(z)$ і $\varphi_k(z)$ - це вертикальні переміщення і кути закручування балки для k -го тону. Тоді очевидно, що елементарна робота погонних сил і моментів (при $q_k=1$)

$$\delta A = f_k(z) q_{n\text{нов}}(z) dz + \varphi_k(z) m_{n\text{нов}}(z) dz. \quad (168)$$

Узагальнена маса M_k для k -го тону пружних коливань

$$M_k = \sum_{n_B} \int_0^{l_{n\delta}} f_k^2(z) m_{n_k}(z) dz + \sum_{n_B} \int_0^{l_{n\delta}} \varphi_k^2(z) I_{M_k}(z) dz, \quad (169)$$

де $m_{n_k}(z)$ і $I_{M_k}(z)$ – погонні маси і масові моменти інерції k -ї балки.

Система диференціальних рівнянь (166) є сумісною, тобто кожне із цих рівнянь залежить від решти. Наприклад, піднімальна сила Y і момент M_z на кожному часовому кроці визначаються не тільки кінематичними параметрами руху, але і характером деформування конструкції (значеннями узагальнених координат), і навпаки.

Наведемо результати розрахунку динамічної реакції літаків транспортної категорії.

Літак типу Bombardier CRJ-700 (рис. 102).

Літак виконаний із стрілоподібним крилом. Два турбореактивних двигуни General Electric CF34-8C1 тягою по 56,4 кН розміщені в хвостовій частині фюзеляжу.



Рис. 102. Літак типу Bombardier CRJ-700

Масові характеристики консолі крила і шасі прийняті за статистикою в частках від злітної маси. Геометричні і масові характеристики спрямленого крила внесені в табл. 3.

Таблиця 3 – Геометричні і масові характеристики консолі крила

$m_{\text{п конс}},$ КГ	$m_{\text{конс.кр}},$ КГ	$l_{\text{кр}},$ М	$b_0,$ М	$b_{\text{кінц}},$ М	$b_{\text{САХ}},$ М	$S_{\text{конс.кр}},$ М ²	$m_{\text{ш}},$ КГ
3500	1650	10,46	4,57	1,27	2,9	32,4	650

Для крила вибрано профіль НАСА-2212. Вибираємо положення лонжеронів у поперечному перерізі за статистикою (рис. 103).

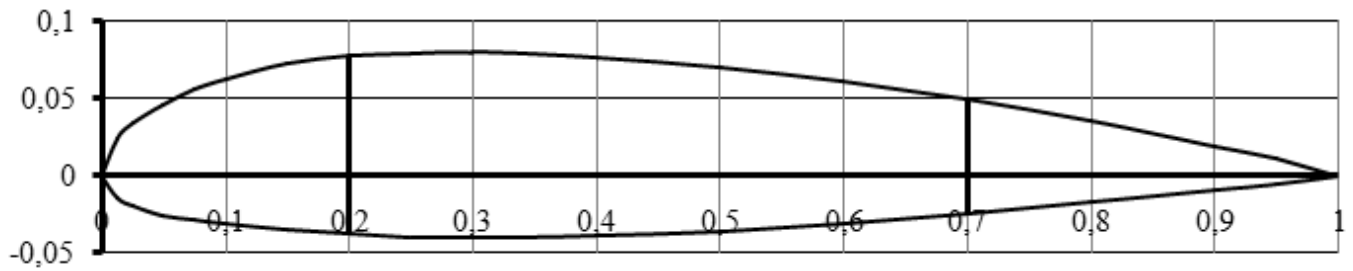


Рис. 103. Профіль крила і положення лонжеронів у перерізі

Аеродинамічне компонування літака показано на рис. 104.

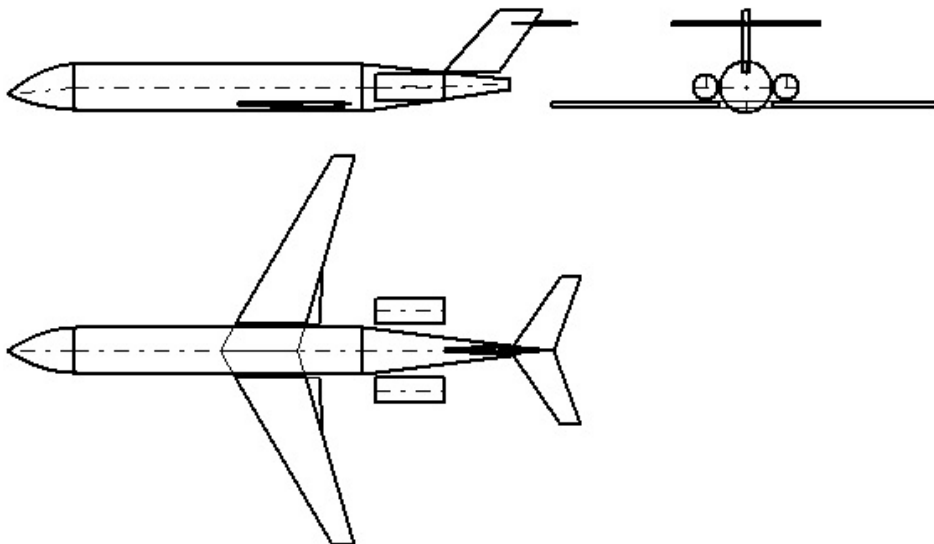


Рис. 104. Аеродинамічне компонування ЛА

Розподіл погонної маси і погонного моменту інерції крила за розмахом показані на рис. 105 і 106.

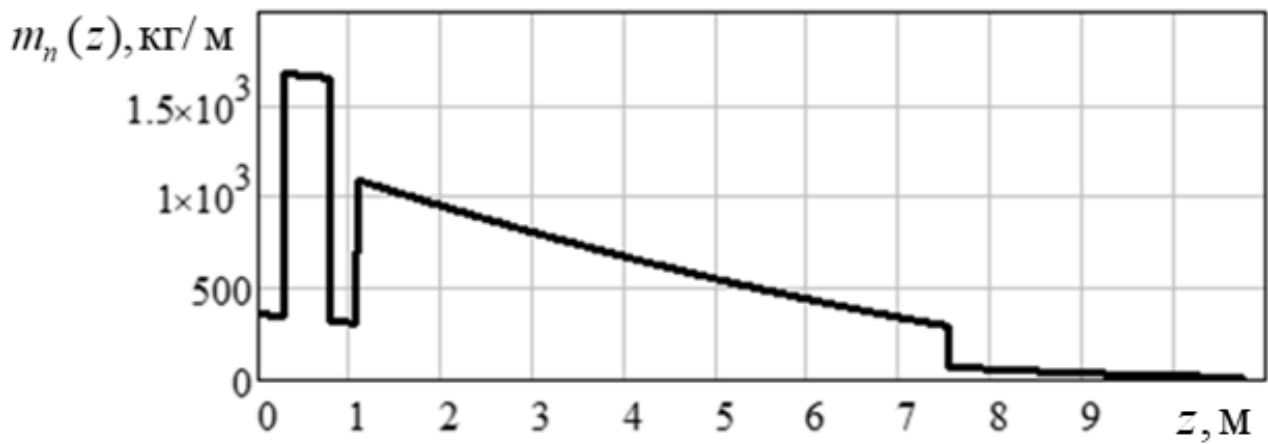


Рис. 105. Розподіл погонної маси крила за розмахом

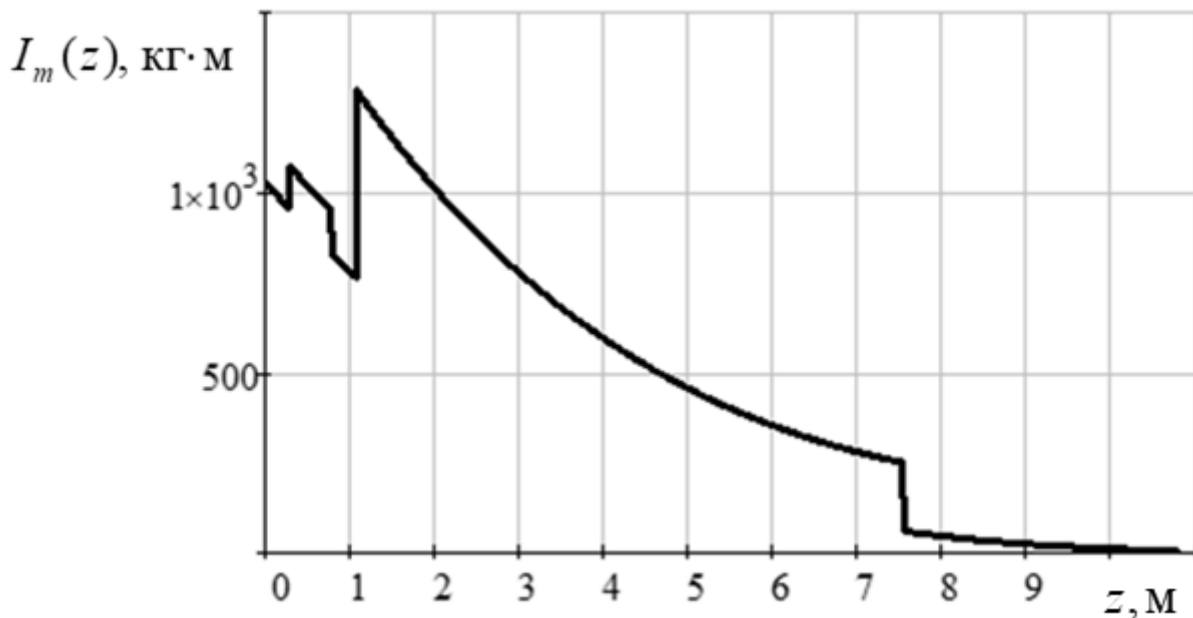


Рис. 106. Розподіл погонного масового моменту інерції крила за розмахом

Стрибки на епюрах пов'язані з розміщенням на крилі шасі і палива.

Розподіл згинальної і крутильної жорсткості за розмахом задані на основі розрахунку перерізу $\bar{z} = 0,1$ і з урахуванням даних статистики і має вигляд кривих, показаних на рис. 107 і 108.

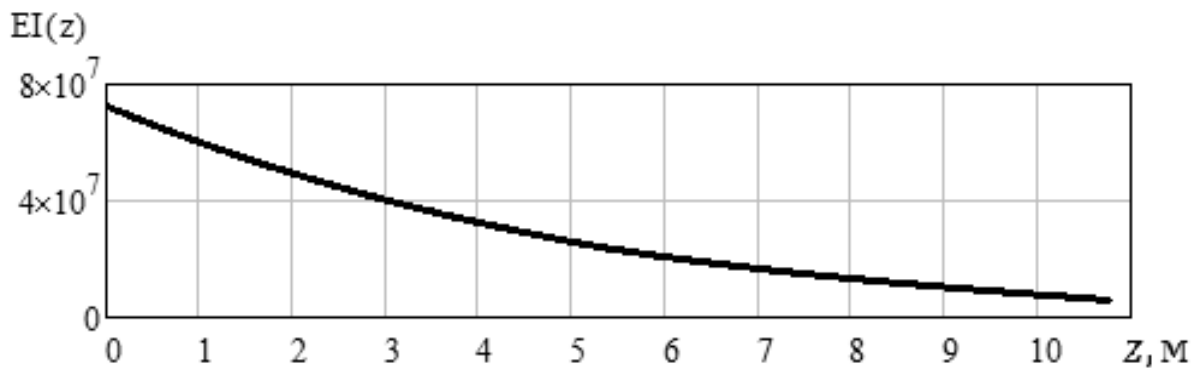


Рис. 107. Розподіл згинальної жорсткості крила вздовж розмаху

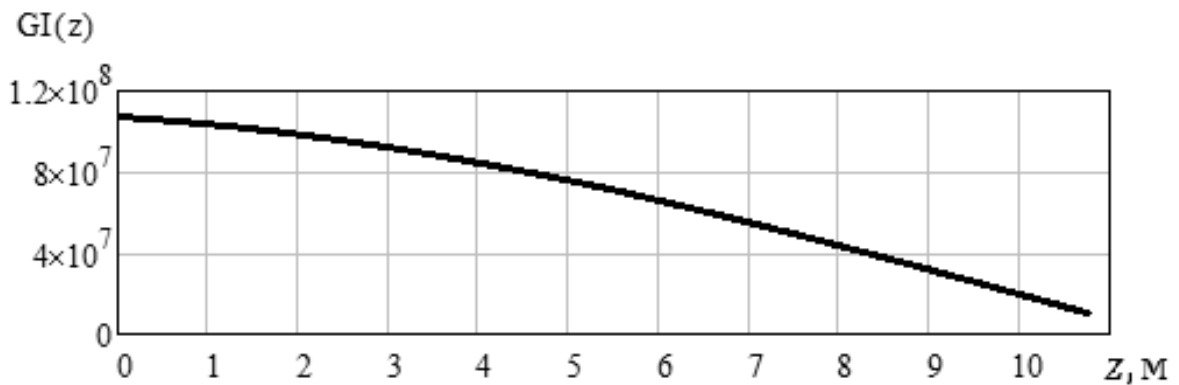


Рис. 108. Розподіл крутильної жорсткості за розмахом

На рис. 109 – 111 показано частоти і форми перших трьох тонів власних згинальних коливань, що отримані розрахунком. При цьому вважаємо, що маси розміщені на осі жорсткості, тобто виникають ізольовані згинальні коливання консолі крила, защемленої до фюзеляжу. Ці тони коливань використовують у методі заданих форм при інтегруванні руху і коливань конструкції.

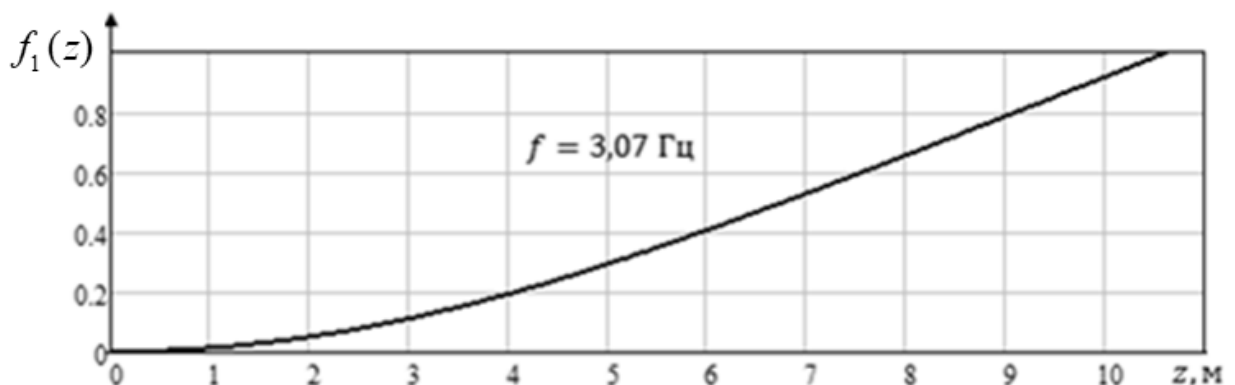


Рис. 109. Перша форма власних згинальних коливань

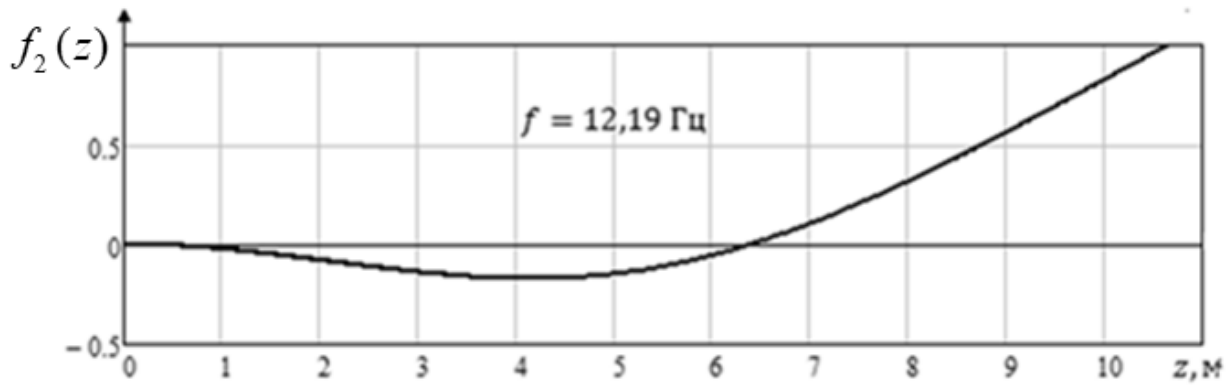


Рис. 110. Друга форма власних згинальних коливань

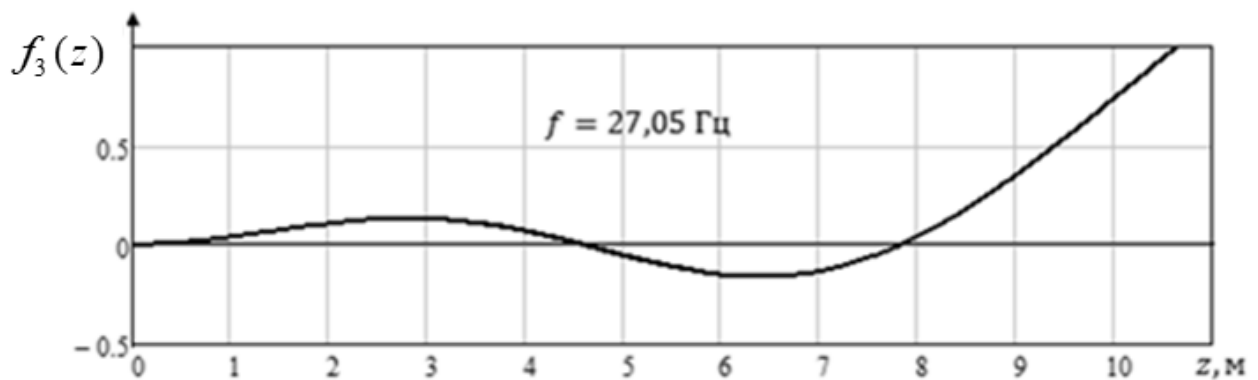


Рис. 111. Третя форма власних згинальних коливань

У результаті розрахунку отримані частоти і форми ізольованих власних крутильних коливань. Перші три з них показані на рис. 112 –114.

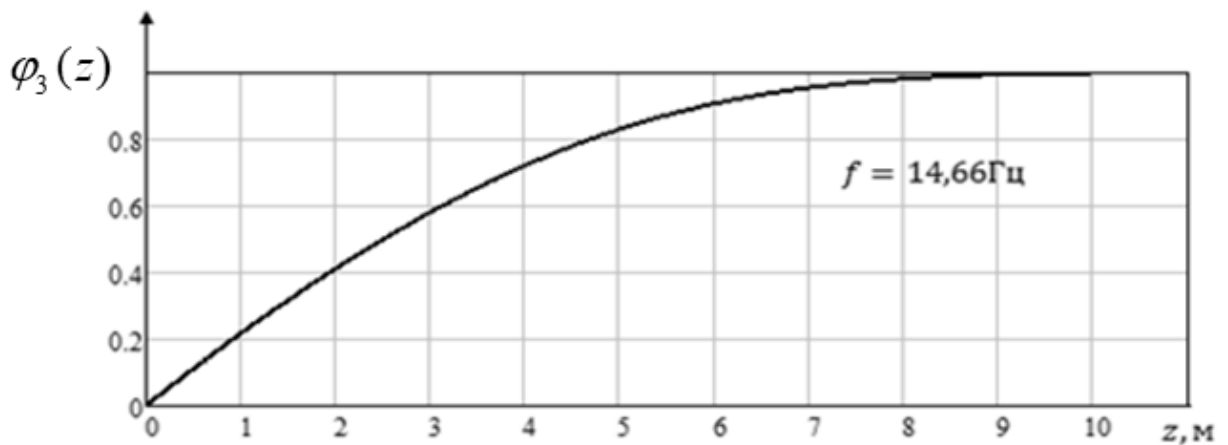


Рис. 112. Перша форма власних крутильних коливань



Рис. 113. Друга форма власних крутильних коливань

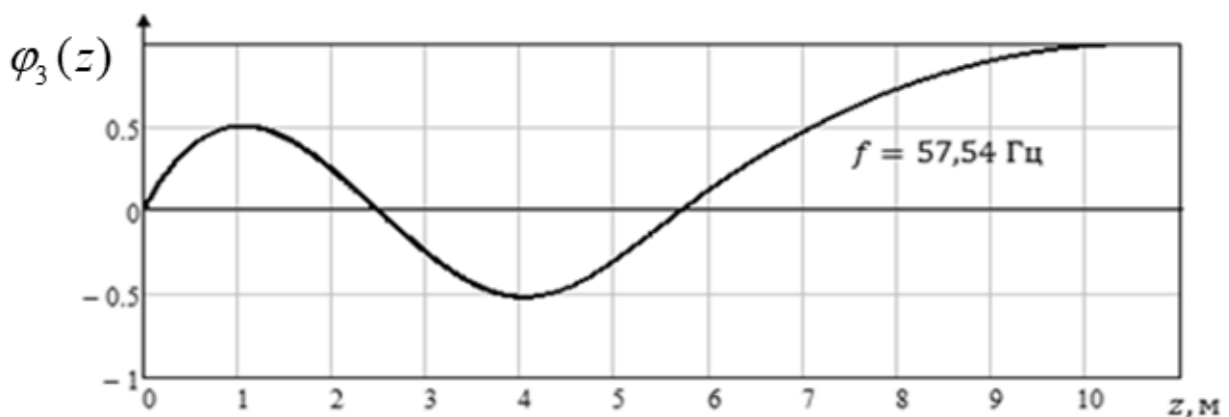


Рис. 114. Третя форма власних крутильних коливань

Деформація консолі розкладалася за формами ізольованих згинальних і крутильних коливань.

У результаті спільного вирішення рівнянь динаміки польоту і пружних коливань консолі крила при дії одиничного пориву отримано:

- реакцію статично стійкого ЛА (зміну з часом кута тангажа, кута атаки і кута нахилу траєкторії);
- узагальнені координати згинальних коливань консолі;
- узагальнені координати крутильних коливань;
- пружні крутильні та згинальні деформації;
- перевантаження ЛА в різних його точках;
- динамічне навантаження конструкції.

Зміна кутів тангажа, атаки і нахилу траєкторії (в градусах) показана на рис. 115.

Видно, що ЛА стійкий за перевантаженням – при дії пориву літак самостійно зменшує свій кут атаки. Даний короткоперіодичний рух літака впливає на місцеві кути атаки і на навантаження конструкції.

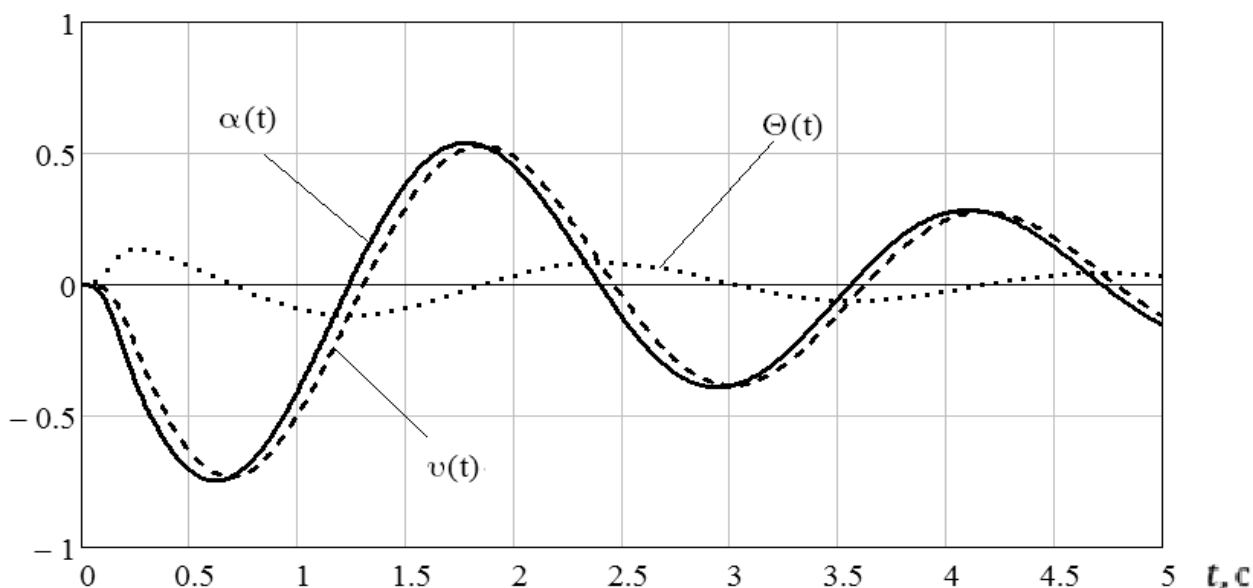


Рис. 115. Зміна кута атаки, тангажа і нахилу траєкторії після входу в порив

На рис. 116 – 117 показано відгук конструкції на нестационарне навантаження для перших двох згинальних узагальнених координат. Найбільший внесок у деформування ЛА здійснює перший тон коливань – згин крила. Помітним є вплив на деформування короткоперіодичного руху всього ЛА.

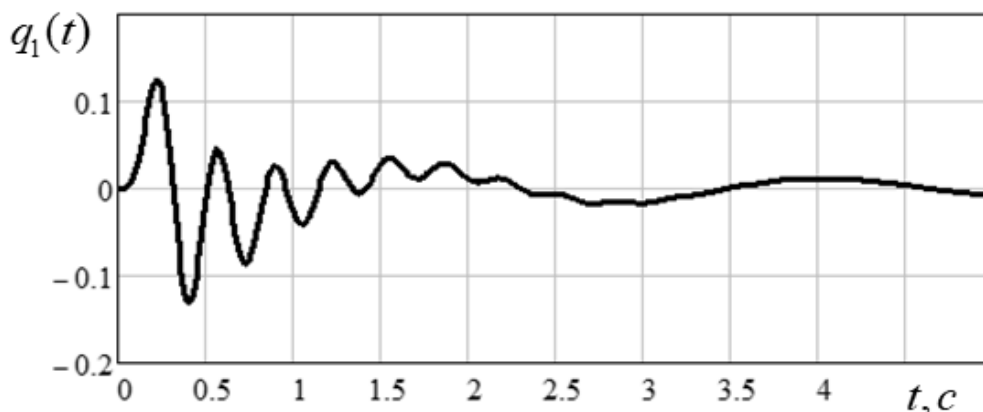


Рис. 116. Зміна першої згинальної узагальненої координати

За час пориву збуджуються в основному коливання за першою формою. Надалі вони мають затухаючий характер, що пов'язано з аеродинамічним і

конструкційним демпфіруванням. Внесок другої і вищих форм коливань у деформування помітно менше, оскільки час наростання пориву набагато більший за період власних коливань конструкції. Крім того, зовнішня аеродинамічна сила здійснює найбільшу роботу на переміщеннях за першою формою.

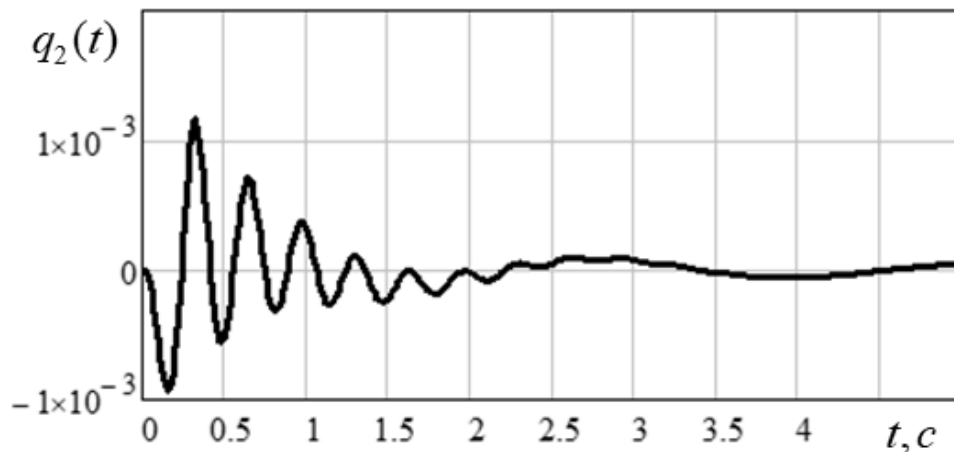


Рис. 117. Зміна другої згинальної узагальненої координати

Крутильні коливання майже не виявляються, оскільки крило має високу жорсткість на кручення і, порівняно із згинальними коливаннями, великі власні частоти.

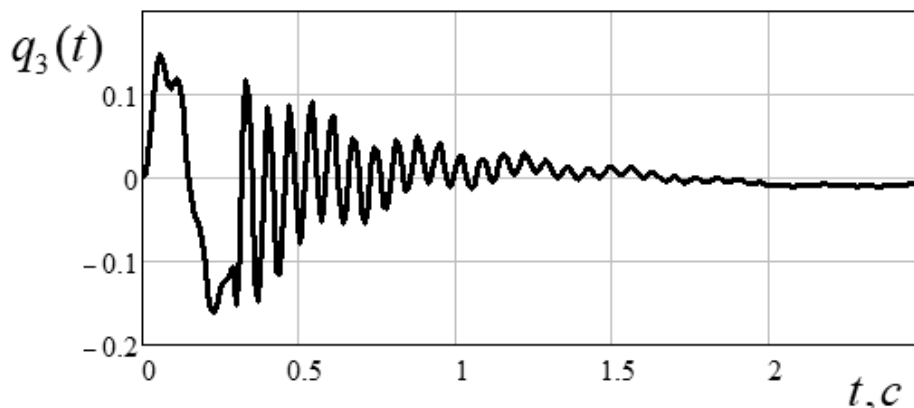


Рис. 118. Зміна першої крутильної узагальненої координати

Зміна згинальних пружних деформацій кінця крила показана на рис. 118.

Пружні коливання консолі визначаються в основному першим згинальним тоном. Ці вібрації за декілька секунд практично згасають, а надалі переміщення крила залежить від короткоперіодичного руху ЛА і зміни кутів атаки.

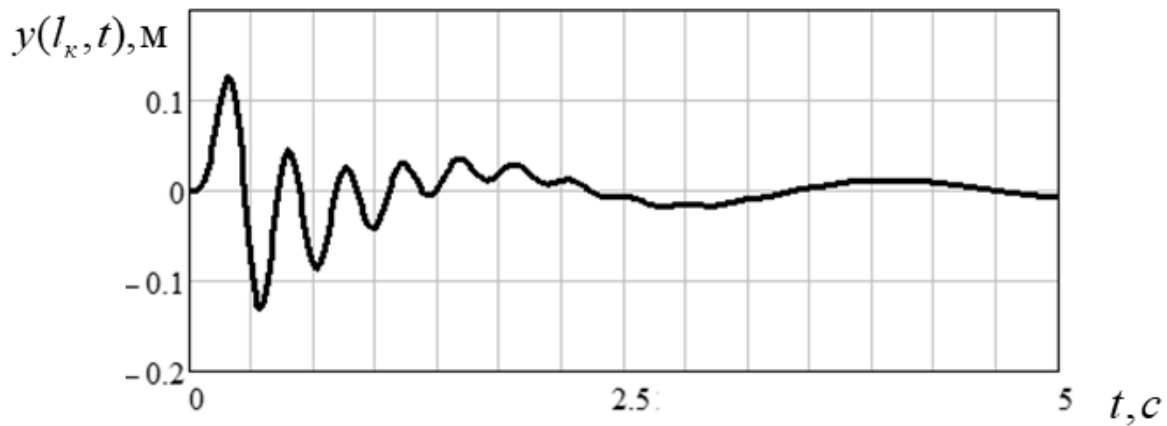


Рис. 119. Зміна згинальних пружних деформацій кінця крила

Деформація кручення крила незначна (рис. 120) і відбувається за першим крутильним тоном коливань.

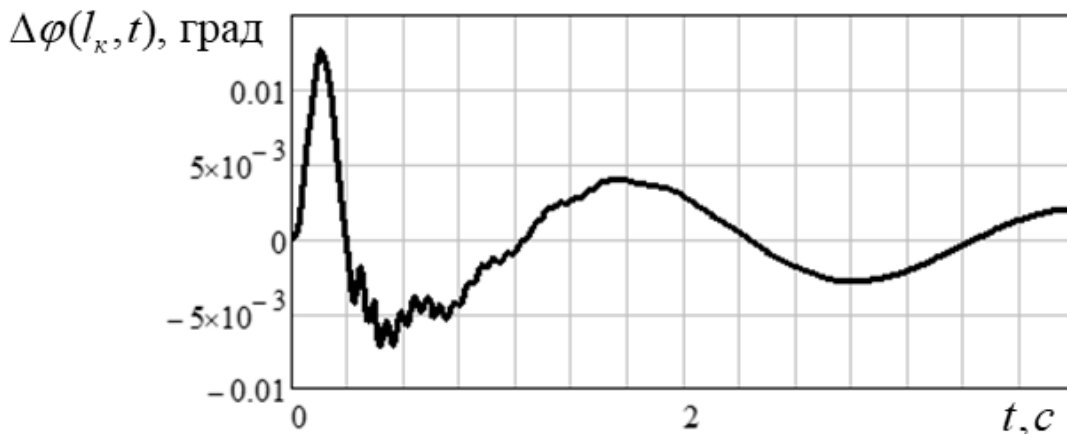


Рис. 120. Крутильні коливання перерізу на кінці крила

Дані свідчать про те, що деформація крила визначається першою узагальненою координатою. Плавна зміна аеродинамічного навантаження з часом викликає відгук конструкції за декількома нижчими формами коливань.

На графіку (рис. 121) показано зміну перевантаження в центрі мас літака і в крайньому перерізі крила. Це додаткові перевантаження, що пов'язані із збуреним рухом літака. Вихідним режимом є сталий політ з одиничним перевантаженням.

Як видно, перевантаження на кінцях крила в декілька разів перевищують перевантаження в центрі мас літака. У місцях розташування великих зосереджених мас слід очікувати дію значних сил інерції.

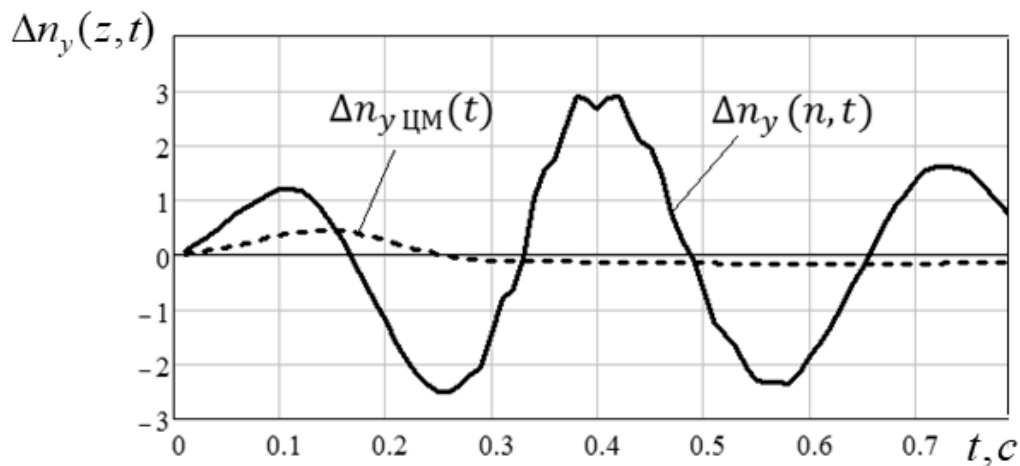


Рис. 121. Зміна перевантаження в центрі мас літака і в крайньому перерізі крила.

Розраховано зміну з часом поперечної сили і згинального моменту в розрахунковому перерізі консолі від розподіленого аеродинамічного навантаження і сил інерції (рис. 122 і 123).

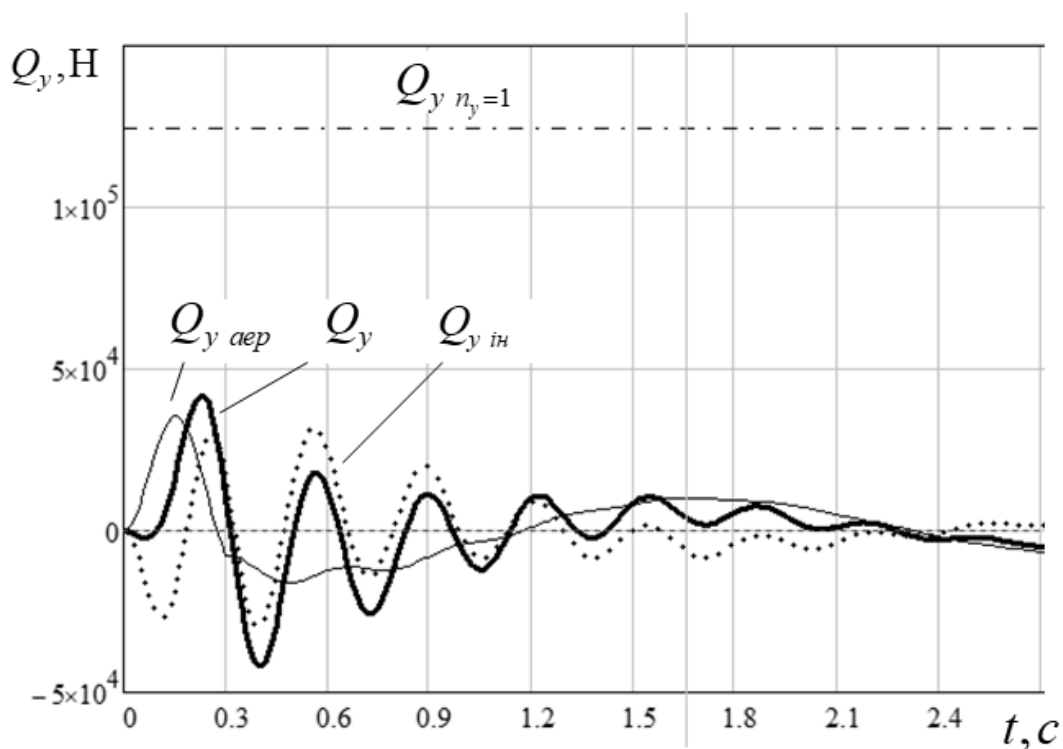


Рис. 122. Зміна з часом поперечної сили

Додаткова поперечна сила в перерізі від дії пориву становить значну частку від сили у незбуреному польоті (Q_y при $n_y = 1$). Величина сили складається з аеродинамічної та інерційної сил, це добре видно із графіка.

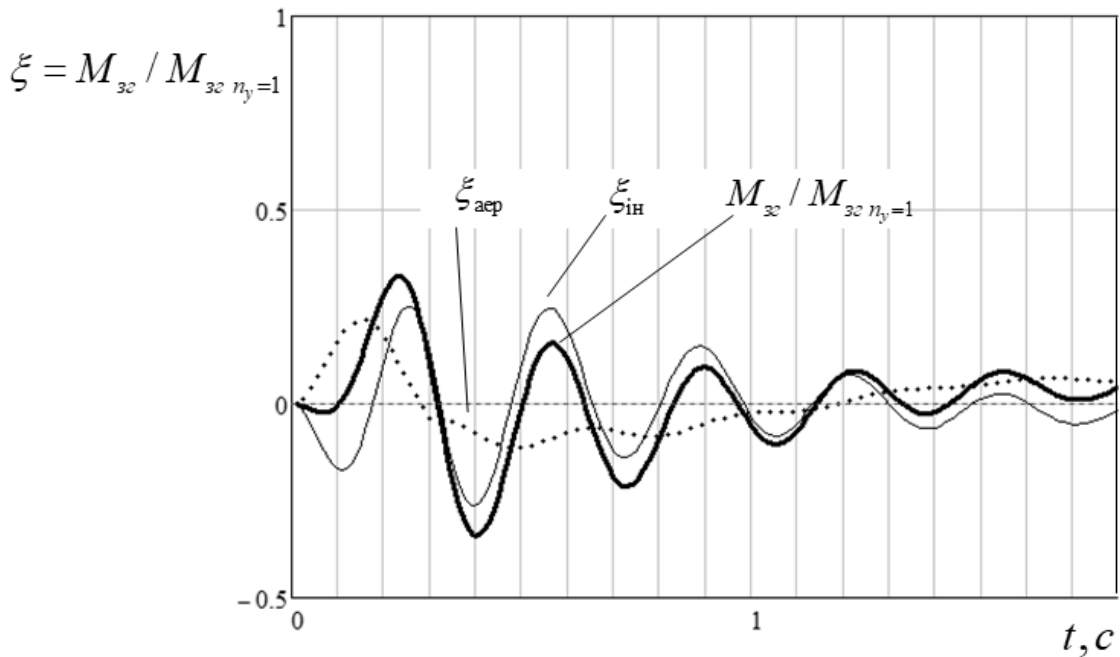


Рис. 123. Зміна з часом згинального моменту

Як видно, при аналізі навантаження ЛА треба брати до уваги динаміку руху літака. Максимальне динамічне навантаження становить близько 25%.

Результати розрахунку динамічної реакції на пориви, що повторюються

Найбільш небезпечним може стати випадок навантаження конструкції літака при попаданні не в один, а в декілька повітряних поривів поспіль (наближена схема безперервної турбулентності). Найчастіше таке навантаження відбувається в нижніх шарах атмосфери. Розглянемо випадок горизонтального польоту літака на висоті 2000 м. Ефективна швидкість пориву для даної висоти – 12,9 м/с. Форма пориву показана на рис. 124.

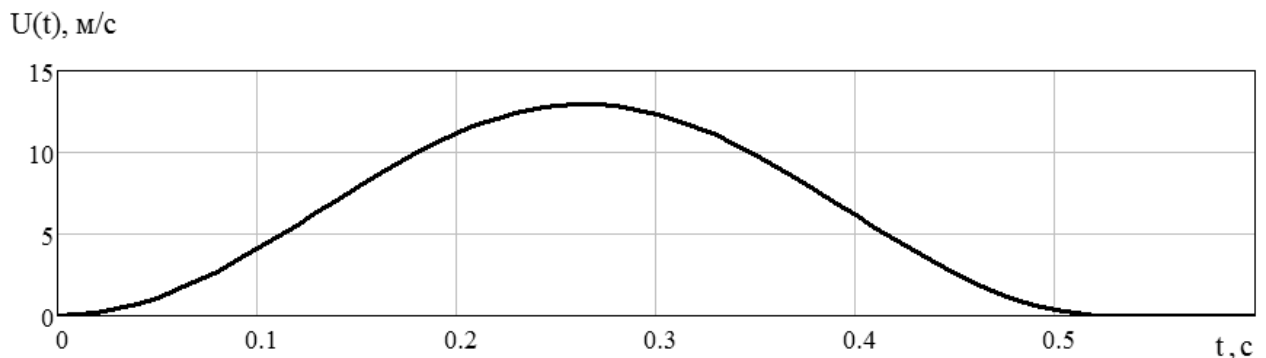


Рис. 124. Форма одиничного пориву на висоті $H = 2000$ м

Нехай на шляху ЛА зустрічаються поспіль три пориви. Необхідно визначити найбільш небезпечне навантаження конструкції. У зв'язку з цим розглянемо найбільш несприятливий випадок – три пориви повторюються з частотою, кратною першій власній частоті згинальних коливань крила

Форма турбулентної ділянки показана на рис. 125.

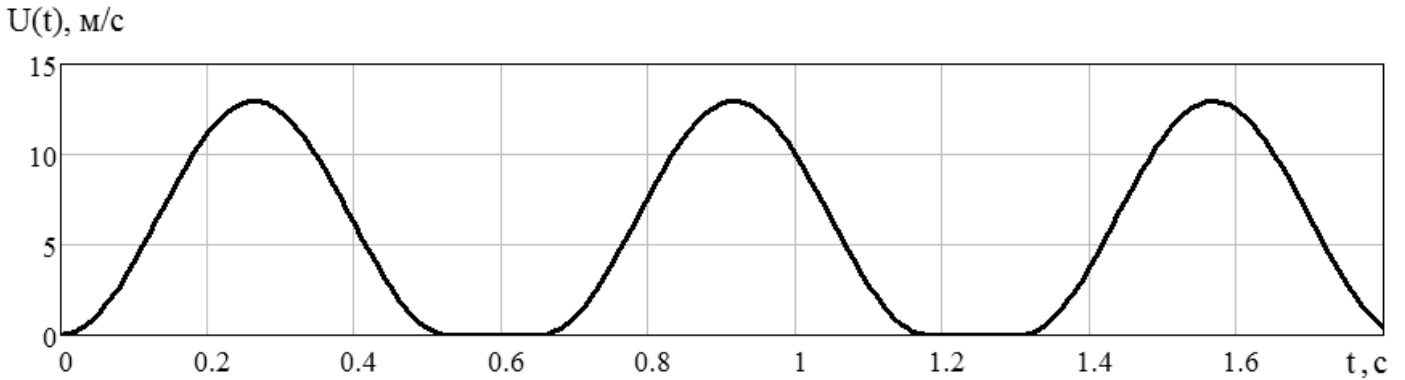


Рис. 125. Форма турбулентної ділянки на висоті $H = 2000$ м

Розрахунок динамічної реакції крила проведено за методикою, викладеною вище. Порівняємо результати розрахунку перевантажень для одноразового і багаторазового пориву (рис. 126).

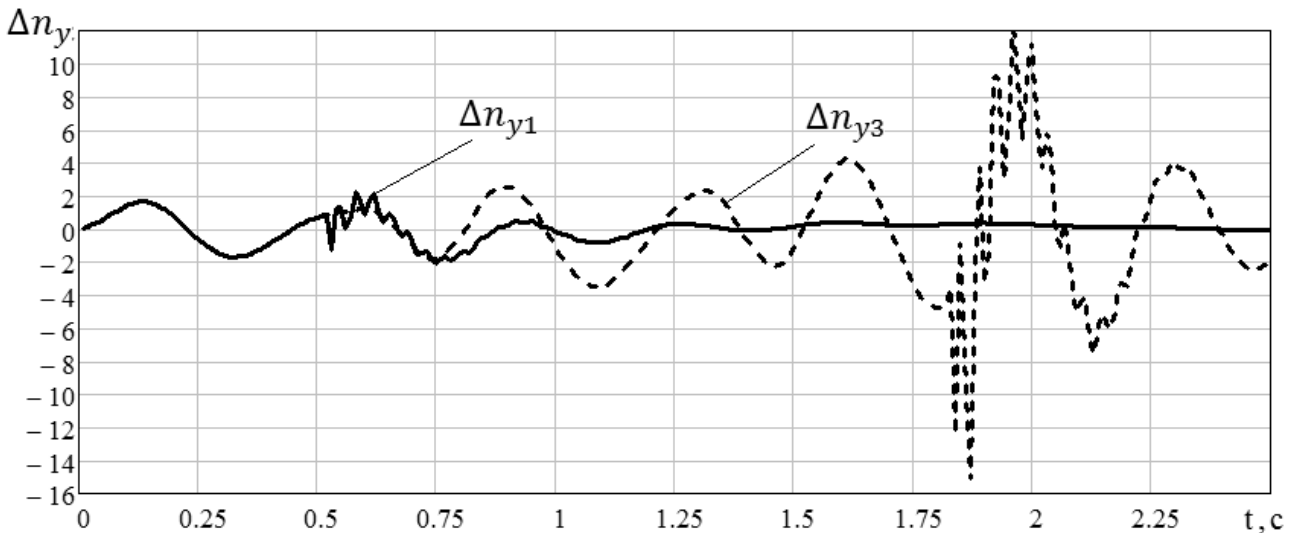


Рис. 126. Перевантаження кінця консолі при попаданні в одноразовий і багаторазовий повітряні пориви

На графіку видно, що в результаті дії пориву з частотою, кратною першій частоті вільних згинальних коливань із кожним новим поривом, амплітуда перевантажень зростає. Оскільки перша згинальна частота кратна другій, то з кожним новим поривом посилюються коливання не

тільки за першою, але й за другою формою. В результаті цього максимальне перевантаження кінця крила виросло майже в шість разів.

Значно збільшилося довантажування консолі згинальним моментом у разі дії трьох поривів (рис. 127). Збільшення згинальних моментів показані в частках від згинального моменту, що діє в сталому горизонтальному польоті:

$$\overline{\Delta M_{зг l}}(t) = \frac{\Delta M_{зг}}{M_{зг n_y=1}}$$

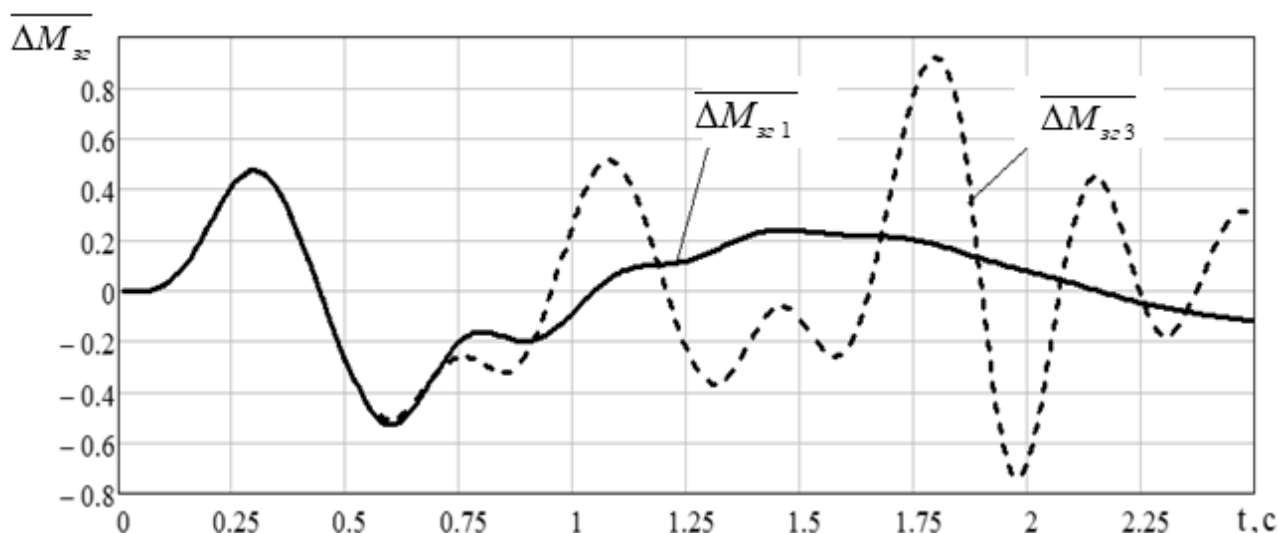


Рис. 127. Згинальний момент у перерізі при попаданні в одноразовий і багаторазовий пориви

Літак типу Ан-24

Наведемо дані моделювання на ПЕОМ навантаження літака Ан-24. Літак здійснює горизонтальний політ. Після входження в вертикальний порив відбувається короткоперіодичний рух ЛА, змінюються його кути атаки, кут нахилу траєкторії, кут тангажа. При зміні місцевих кутів атаки на конструкцію діє нестационарне навантаження.

Зміну приросту перевантаження літака відносно горизонтального польоту показано для випадків входження в однократний і двукратний пориви на рис. 128 і 129.

Горизонтальні лінії вказують на перевантаження (додатне і від'ємне) в центрі мас ЛА згідно з АП - 25. Суцільна лінія – результат розрахунку перевантаження в центрі мас. Пунктирні лінії – перевантаження в кабіні льотчиків і в хвостовій частині фюзеляжу. В конструкції збуджуються

пружні коливання. Розглядається пружна модель зацмленого до фюзеляжу крила. Як задані форми взято власні згинальні тони коливань консолі крила.

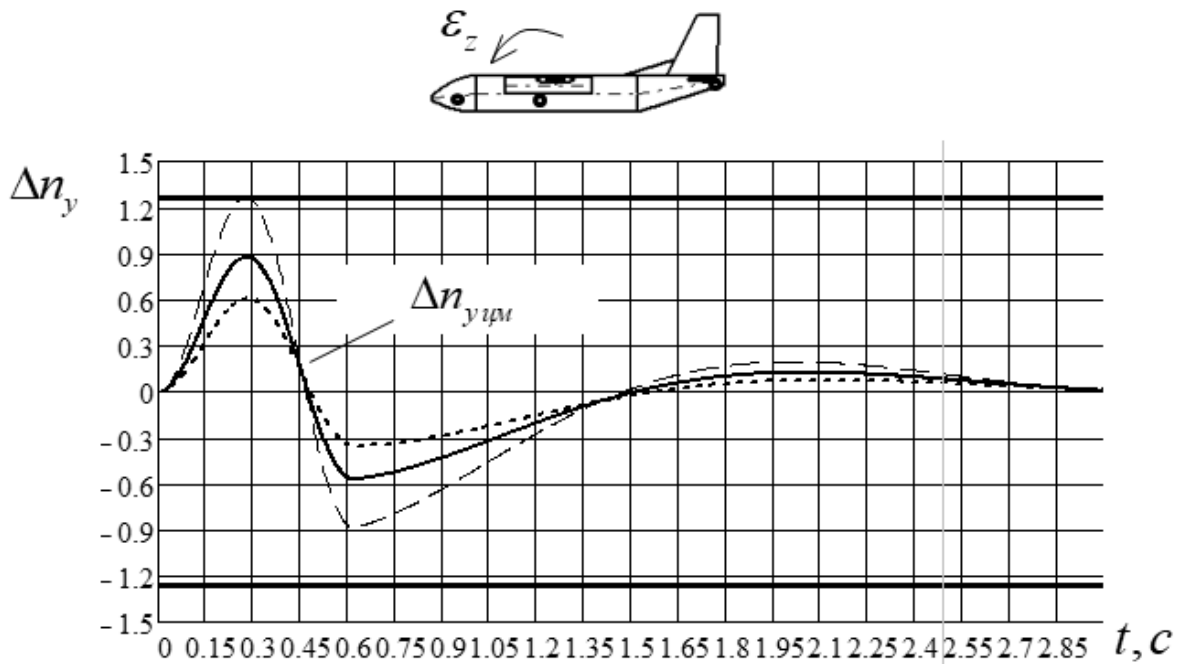


Рис. 128. Приріст перевантаження літака при дії однократного пориву

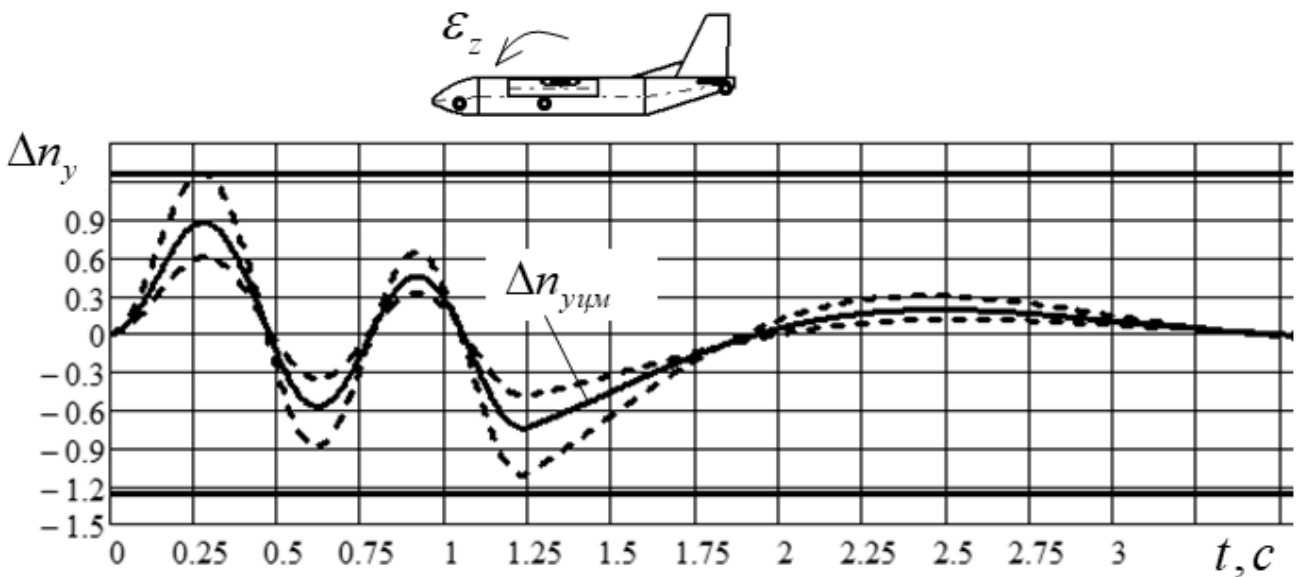


Рис. 129. Приріст перевантаження літака при дії двократного пориву

Як бачимо, при дії двукратного пориву перевантаження літака зростає.

Переміщення точок крила відносно фюзеляжу при вході в двократний порив показано на рис. 130.

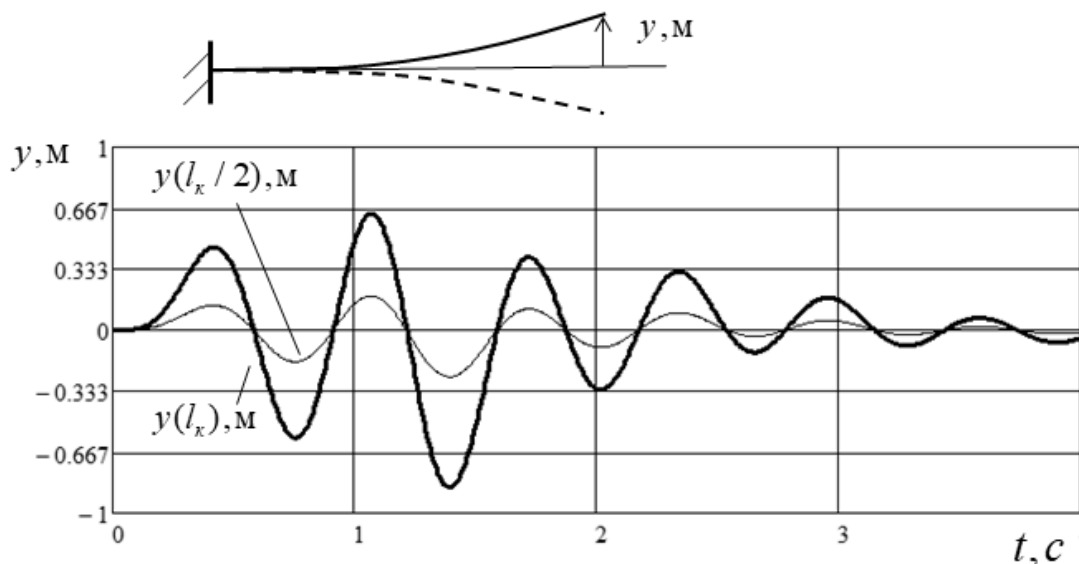


Рис. 130. Переміщення точок крила відносно фюзеляжу

Як видно, деформація в основному визначається першим тоном, перша узагальнена координата змінюється коливально. Переміщення крила у міру наростання швидкості пориву спочатку збільшуються, а потім, внаслідок дії сил демпфірування, згасають.

Внесок вищих тонів пружних коливань несуттєвий. Це пов'язано зі співвідношенням періоду першого тона коливань і часу наростання пориву.

Зміну згинального моменту в розрахунковому перерізі показано на рис. 131.

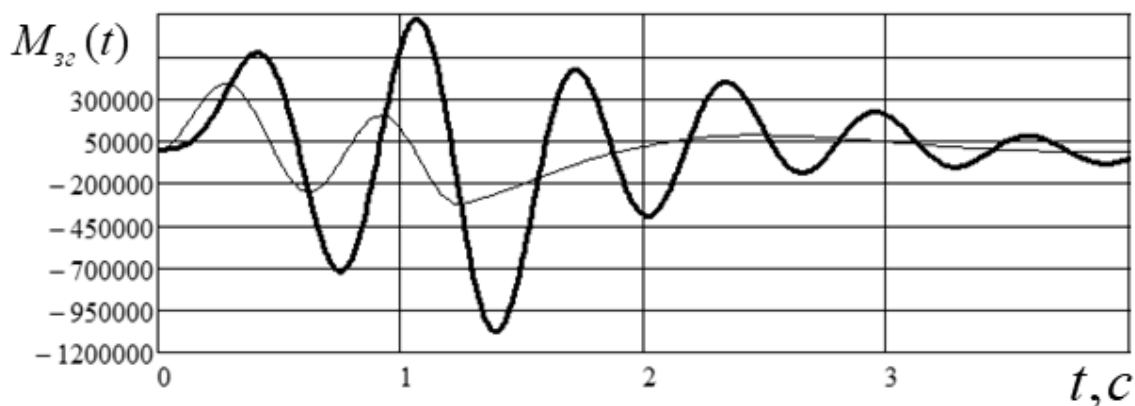


Рис. 131. Зміна згинального моменту в розрахунковому перерізі

Тонкою лінією показані згинальні моменти, які б діяли в перерізі з урахуванням заданих та інерційних сил; жирною лінією – згинальні моменти, які реально діють у перерізі. Вони розраховані з урахуванням деформації пружної лінії балки. Частота зміни згинального моменту визначається коливаннями консолі за першим тоном.

Зміну напружень у небезпечній точці розрахункового перерізу показано на рис. 132.

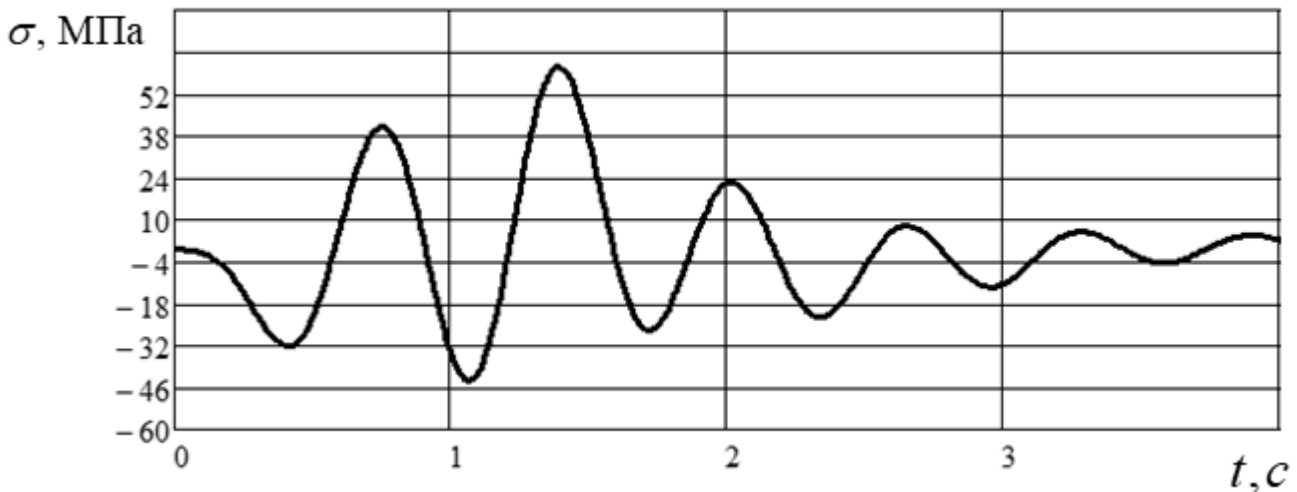


Рис. 132. Зміна напружень у небезпечній точці розрахункового перерізу

У горизонтальному польоті напруження в небезпечній точці розрахункового перерізу дорівнюють

$$\sigma_{z_{n_y=1}} = 85,72 \text{ МПа} .$$

З метою визначення максимального відгуку конструкції літака на дію пориву проведемо параметричний аналіз – проаналізуємо вплив величини відстані від початку пориву до максимального його значення на перевантаження (рис. 133, 134 і 135).

Згідно з АП 25 на кожній із швидкостей польоту слід розглянути достатню кількість значень градієнтних ділянок пориву H у діапазоні від 9,2 до 106,8 м з тим, щоб знайти критичну реакцію для кожного навантаження.

Звичайно розрахункові навантаження в перерізі крила визначають без урахування динаміки руху конструкції. Коливання консолі, викликані турбулентністю, призводять до додаткового динамічного навантаження,

пов'язаного з дією сил інерції. Реакція пружної конструкції на дію атмосферної турбулентності залежить від власних динамічних характеристик конструкції (частот і форм власних коливань) і виду зовнішнього впливу.

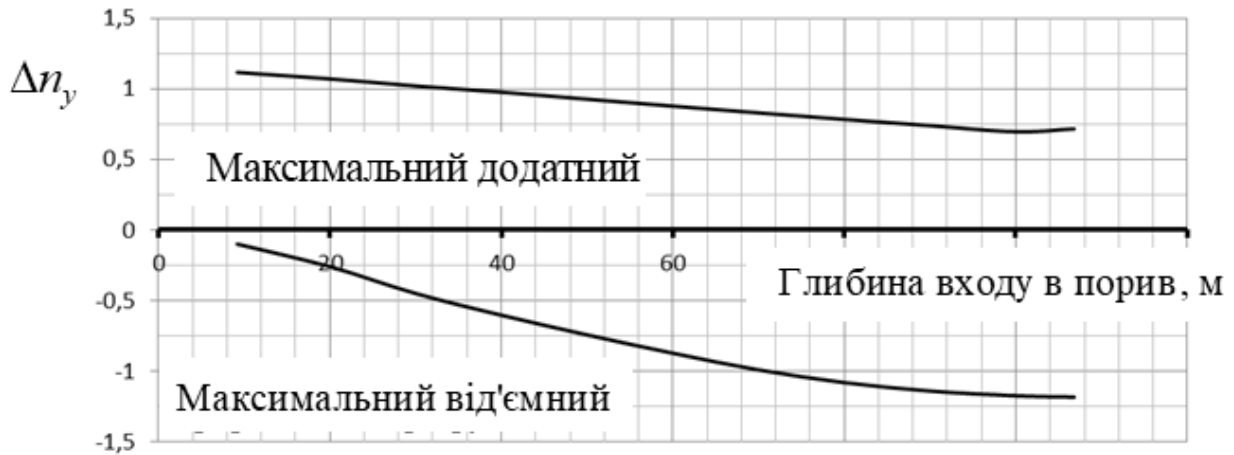


Рис. 133. Приріст перевантаження при різних H



Рис.134. Переміщення кінця крила при різних H

При дослідженні динамічної реакції конструкції на дію атмосферної турбулентності достатньо проводити розрахунок за декількома нижчими тонами пружних коливань. У разі височастотного зовнішнього впливу слід урахувувати більшу кількість власних форм.



Рис.135. Максимальне напруження при різних H

Наявність великих зосереджених мас на крилі в зонах значних прискорень, викликаних пружними коливаннями, може призвести до значної динамічної навантаженості конструкції.

Динамічні явища викликають появу змінних напружень у конструкції. Можливі руйнування конструкції через втому матеріалу і великі додаткові динамічні напруження.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Авиационные правила. Нормы летной годности самолетов транспортной категории. – М. : МАК, 1993. – Ч. 25 (АП – 25). – 483 с.
2. Бисплингхофф, Р. Л. Аэроупругость [Текст] / Р. Л. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Л. Хелфмен. – М. : Изд-во иностр. лит., 1958. – 799 с.
3. Образцов, И. Ф. Строительная механика летательных аппаратов [Текст] / И. Ф. Образцов. – М. : Машиностроение, 1986. – 535 с.
4. Горшков, А.Г. Аэрогидроупругость конструкции [Текст] / А.Г.Горшков, В.И. Морозов, А.Т. Пономарев и др. – М. : Физ.-мат. лит, 2000. – 592 с.
5. Кузнецов, О.А. Динамические нагрузки на самолет [Текст] / О.А. Кузнецов. – М.:Изд-во физ.-мат. лит., 2008. – 264 с.
6. Онищенко, В.М. Свободные и вынужденные колебания конструкции ЛА [Текст] / В.М. Онищенко. – Харьков: ХАИ, 2016. – 101 с.
7. Онищенко, В.М. Расчет резонансной диаграммы лопасти несущего винта транспортного вертолета [Текст] / В.М. Онищенко. – Харьков: ХАИ, 2017. – 106 с.
8. Фершинг, Г. Основы аэроупругости: пер. с нем. [Текст] / Г. Фершинг. – М.: Машиностроение, 1984.– 600 с.
9. Бидерман, В. Л. Прикладная теория механических колебаний [Текст] / В. Л. Бидерман. – М. : Высш. шк., 1972. – 416 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ТА НАВАНТАЖЕННЯ ЛА В НЕСПОКІЙНІЙ АТМОСФЕРІ.....	25
1.1. Аеродинамічне навантаження ЛА.....	29
1.2. Динаміка збуреного руху ЛА як твердого тіла	44
1.3. Динаміка руху і пружні коливання літака при нестационарному навантаженні конструкції.....	52
1.3.1. Пружні моделі конструкції ЛА.....	56
1.3.2. Розподіл масових та інерційних характеристик за розмахом консолі крила.....	66
1.3.3. Оцінювання згинальної та крутильної жорсткості крила на основі методу Релея – Рітца.....	69
1.3.4. Рівняння руху пружної конструкції.....	77
1.3.5. Частоти і форми власних коливань	107
1.3.6. Метод заданих форм. Розкладання руху системи за формами власних коливань.....	145
1.3.7. Динамічні характеристики пружного літального апарата.....	151
2. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ ДИНАМІЧНОЇ РЕАКЦІЇ КОНСТРУКЦІЇ ЛА НА ДІЮ АТМОСФЕРНОЇ ТУРБУЛЕНТНОСТІ.....	155
Бібліографічний список.....	174

Навчальне видання

Онищенко Володимир Михайлович

**ДИНАМІЧНА РЕАКЦІЯ І НАВАНТАЖЕННЯ ЛІТАКА ПРИ ДІЇ
АТМОСФЕРНОЇ ТУРБУЛЕНТНОСТІ**

Редактор Т. Г. Кардаш

Зв. план, 2018

Підписано до друку 15.05.2018

Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 9,8. Обл.- вид. арк. 11. Наклад 50 пр.

Замовлення 173. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

[http:// www.khai.edu](http://www.khai.edu)

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
сер. ДК № 391 від 30.03.2001